GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Fachbereich Informatik und Mathematik
Institut für Informatik

Vorsemesterkurs Informatik

Sommersemester 2012

Aufgabenblatt Nr. II.3

Aufgabe 1 (Direkter Beweis)

Betrachte den folgenden Satz

Satz 1 *Wenn eine Zahl durch 42 teilbar ist, dann ist sie auch durch 14 teilbar.*

(a) Wie lautet die Voraussetzung q und die Folgerung p?

(b) Nenne alle Zahlen zwischen -100 und 100, die durch 42 oder durch 14 teilbar sind.

(c) Welche Beobachtung triffst du in Aufgabeteil (b)?

(d) Welche der folgenden Zahlen sind durch 42 teilbar? Verifiziere deine Antwort, indem du eine ganze Zahl k findest, sodass $a = 42 \cdot k$.

$$33 \quad 84 \quad 462 \quad 540 \quad -728$$

(e) Welche der folgenden Zahlen sind durch 14 teilbar? Verifiziere deine Antwort, indem du eine ganze Zahl k findest, sodass $a = 14 \cdot k$.

$$33 \quad 84 \quad 462 \quad 540 \quad -728$$

(f) Sei a eine Zahl, die durch 42 teilbar ist. Welche Form hat die Zahl nach der Definition der Teilbarkeit?

(g) Sei a eine Zahl, die durch 14 teilbar ist. Welche Form hat die Zahl nach der Definition der Teilbarkeit?

(h) Gebe Aussagen $a_1, \ldots, a_n$ an, sodass die Implikationsfolge $p \to a_1 \to \cdots \to a_n \to q$ erfüllt ist?

(i) Gebe für jeden Zwischenschritt in deiner obigen Implikationsfolge eine Begründung an.

(j) Beweise den obigen Satz, d.h. zeige, dass jede Zahl, die durch 42 teilbar ist, auch durch 14 teilbar ist.

(k) Zeige, dass die folgende Aussage gilt: “0 ist durch 0 teilbar”

(l) Zeige, dass die folgende Aussage gilt: “0 ist durch 15 teilbar”

Aufgabe 2 (Überprüfen von Aussagen)

Beweise oder widerlege (d.h. gebe ein Beispiel an, das zeigt, dass die Aussage nicht stimmen kann):

(a) Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist und eine weitere Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist deren Summe durch 7 teilbar

(b) Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist und eine weitere Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist deren Produkt durch 7 teilbar.

(c) Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, dann ist dessen Quadrat ebenfalls durch 3 teilbar

Aufgabe 3 (Die Magische Zahl $z = p^2 - 1$)

Beweise: Sei $p \geq 5$ eine Primzahl.

(a) Dann ist die Zahl $z = p^2 - 1$ durch 3 teilbar.

(b) Dann ist die Zahl $z = p^2 - 1$ durch 2 teilbar.

(c) Dann ist die Zahl $z = p^2 - 1$ durch 4 teilbar.

(d) Dann ist die Zahl $z = p^2 - 1$ durch 24 teilbar.

Hinweis: $p^2 - 1 = (p - 1) \cdot (p + 1)$

Aufgabe 4 (Direkter Beweis II)

Beweise folgenden Satz:

Satz 2 *Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, dann ist dessen Quadrat ebenfalls durch 3 teilbar.*

Aufgabe 5 (Direkter Beweis durch Umformen)

Zeige durch Umformen, dass für $q \neq 1$ gilt:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Aufgabe 6 (Beweis durch Widerspruch)

Satz 3 *$a + b$ ist durch 7 teilbar, wenn a und b durch 7 teilbar sind*

(a) Wie lautet die Voraussetzung p und die Folgerung q?

(b) Wie lautet die Negation von q?

(c) Welche Form hat eine Zahl, die durch 7 teilbar ist?

(d) Finde Zwischenaussagen $a_1, \ldots, a_n$, sodass die Implikationsreihenfolge $(p \wedge \neg q) \to a_1 \cdots a_n \to f$ gilt, wobei f eine falsche Aussage darstellt.

(e) Begründe die Schritte, die jeweils zur nächsten Zwischenaussage führen.

(f) Beweise den obigen Satz durch Widerspruch.

Aufgabe 7 ($\sqrt{2}$ ist irrational)

Zeige, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist, d.h. sie hat nicht die Form $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ für ganze Zahlen m und n.
Hinweis: n und m sind teilerfremd, d.h. es gibt keine Zahl, die m und n teilt, bzw. der Bruch $\frac{m}{n}$ lässt sich nicht weiter kürzen

Aufgabe 8 (Widerspruch und Kontraposition)

Betrachte die folgenden Aussagen und entscheide, ob sie wahr oder falsch sind.
Wenn sie wahr sind, dann beweise.
Wenn sie falsch sind, dann widerlege die Aussage, d.h. gebe ein Beispiel an, das zeigt, dass die Aussage nicht stimmen kann.

(a) Sei a eine natürliche Zahl. Wenn a^3gerade ist, dann ist a^4 gerade.

(b) Wenn n oder m durch 3 teilbar sind, dann ist auch die Summe $n + m$ durch 3 teilbar.

(c) Wenn a und b ungerade Zahlen sind, dann ist auch die Summe $a + b$ ungerade.

Aufgabe 9 (Addition von O)

Zeige, dass gilt: Wenn $f_1 = O(g_1)$ und $f_2 = O(g_2)$, dann gilt: $f_1 + f_2 = O(g_1 + g_2)$