

Vorsemesterkurs Informatik

Sommersemester 2012

Aufgabenblatt Nr. II.1

1 (Induktion)

Summiert man die ersten ungeraden Zahlen, so erhält man *anscheinend* stets eine Quadratzahl:

$$\begin{array}{rcccccl} & & & & 1 & = & 1 & = & 1^2 \\ & & & & 3 & + & 1 & = & 4 = 2^2 \\ & & 5 & + & 3 & + & 1 & = & 9 = 3^2 \\ & 7 & + & 5 & + & 3 & + & 1 & = & 16 = 4^2 \\ 9 & + & 7 & + & 5 & + & 3 & + & 1 & = & 25 = 5^2 \end{array}$$

Diesen Umstand sollen Sie in allgemeiner Form beweisen (s.u.). Hierzu ein paar Erläuterungen:

Eine *gerade* Zahl lässt sich stets in der Form $2 \cdot n$ schreiben mit $n \in \mathbb{N}$.

Eine *ungerade* Zahl lässt sich stets in der Form $2 \cdot n + 1$ schreiben mit $n \in \mathbb{N}$.

In den obigen fünf Summen gilt: Ist der letzte Summand die Zahl $2n + 1$ so ist der Wert der Summe $(n + 1)^2$. In der letzten Beispielzeile wird zum Beispiel bis $9 = 2 \cdot 4 + 1$ summiert und die Summe ergibt $(4 + 1)^2 = 5^2$.

Achtung: Dies alles ist nur eine Erläuterung der zu beweisenden Formel. Wir haben noch kein Beweis für den allgemeinen Fall geführt!

Aufgabe 1.1 Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\sum_{i=0}^n (2i + 1) = (n + 1)^2.$$

Aufgabe 1.2 Die Menge $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ bestehe aus n Objekten, die wir mit u_i bezeichnen.

Zeige: Die Menge U besitzt genau 2^n Teilmengen, wenn wir die leere Menge auch als eine Teilmenge von U zulassen.

Aufgabe 1.3 Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt die Ungleichung $n^3 > 3n + 3$.

Bitte bemerken: Die Aussage gilt *nicht* für $n = 1$ und $n = 2$.

2 (fehlerhafte Induktion)

Aufgabe 2.1 Wir “zeigen” nun, dass alle Pferde die selbe Farbe haben und führen einen Beweis durch Induktion über die Zahl n aller Pferde:

- Im **Induktionsanfang** ist $n = 1$ und die Behauptung ist offensichtlich richtig: ein Pferd hat stets mit sich selbst die selbe Farbe.
- Für den **Induktionsschritt** nehmen wir an, dass es $n + 1$ Pferde $p_1, \dots, p_{n+1}$ gibt. Und nach Induktionsvoraussetzung haben alle Pferde $p_1, \dots, p_n$ die selbe Farbe, sagen wir die Farbe von Pferd p_1 . Ebenso, nach Induktionsvoraussetzung haben die Pferde $p_2, \dots, p_{n+1}$ die Farbe von p_2 . Somit haben alle $n + 1$ Pferde $p_1, \dots, p_{n+1}$ die selbe Farbe und wir haben die Behauptung gezeigt.

Was haben wir hier falsch gemacht?

3 (Induktive Argumentation)

Aufgabe 3.1 Zeige: Teilt man ein Rechteck durch Geraden in Teilflächen, so kann man die Teilflächen immer so mit den Farben Schwarz und Weiß färben, dass Teilflächen, die an einer Kante zusammenstoßen, verschiedene Farben besitzen.

4 (Rekursion)

Aufgabe 4.1 Schreiben Sie (in Pseudocode) eine rekursiv definierte Funktion, die für Input $n \in \mathbb{N}$ die ersten natürlichen Zahlen bis n (inklusive) addiert. Beachten Sie: mit $\mathbb{N}$ sind hier die natürlichen Zahlen **inklusive Null** gemeint.