

Vorsemesterkurs Informatik Sommersemester 2013

Aufgabenblatt Nr. II.3

Aufgabe 1 (ungerade Zahlen)

Summiert man die ersten ungeraden Zahlen, so erhält man *anscheinend* stets eine Quadratzahl:

$$\begin{array}{rclclcl} 1 & = & 1 & = & 1^2 \\ 3 & +1 & = & 4 & = & 2^2 \\ 5 & +3 & +1 & = & 9 & = & 3^2 \\ 7 & +5 & +3 & +1 & = & 16 & = & 4^2 \\ 9 & +7 & +5 & +3 & +1 & = & 25 & = & 5^2 \end{array}$$

Diesen Umstand sollen Sie in allgemeiner Form beweisen (s.u.). Hierzu ein paar Erläuterungen:

Eine *ungerade* Zahl lässt sich stets in der Form $2 \cdot n - 1$ schreiben mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

In den obigen fünf Summen gilt: Ist der letzte Summand die Zahl $2n - 1$ so ist der Wert der Summe n^2 . In der letzten Beispielzeile wird zum Beispiel bis $9 = 2 \cdot 5 - 1$ summiert und die Summe ergibt $25 = 5^2$.

Achtung: Dies alles ist nur eine Erläuterung der zu beweisenden Formel. Wir haben noch kein Beweis für den allgemeinen Fall geführt!

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$.

1. Welche Behauptung ist für den Induktionsanfang zu beweisen?
2. Wie lautet die Induktionsvoraussetzung?
3. Wie lautet die Induktionsbehauptung?

Hinweis: Beispiel 7.2 im Skript S. 83/84 könnte weiterhelfen.

Aufgabe 2 (vollständig Induktion)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständig Induktion nach n .

- a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ gilt: $2^n > n^2$.
- b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$.

Aufgabe 3 Induktive Argumentation

Beweisen Sie durch induktive Argumentation folgende Aussage.

n Elemente lassen sich auf $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$ Arten anordnen.

Aufgabe 4 Rekursiv definierte Funktionen

Schauen Sie sich im Skript S. 40 die Haskell-Funktion `erste_rekursive_Funktion` an.

- a) formulieren Sie für diese Funktion eine rekursive Funktionsgleichung $f(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ wie z.B. die Fakultätsfunktion im Skript S. 87.
- b) Beweisen Sie, dass die von Ihnen aufgestellte Funktion $f(n)$, tatsächlich $\sum_{i=0}^n i$ berechnet. (S. 88 im Skript könnte helfen.)

Aufgabe 5 Pseudocode

- a) Schreiben Sie einen Algorithmus in Pseudocode, der die Fakultätsfunktion berechnet.
- b) Algorithmus 5.14 im Skript (S. 73), zeigt die Binärsuche als iterativen Algorithmus. Schreiben Sie die Binärsuche als rekursiven Algorithmus in Pseudocode auf.