

Vorsemesterkurs Informatik

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt Nr. 4A

Aufgabe 1 (Direkter Beweis)

Wir betrachten den folgenden Satz

Satz 1 *Wenn eine Zahl durch 42 teilbar ist, dann ist sie auch durch 14 teilbar.*

- (a) Wie lautet die Voraussetzung p und die Folgerung q ?
- (b) Nennen Sie alle Zahlen zwischen -100 und 100, die durch 42 oder durch 14 teilbar sind.
- (c) Welche Beobachtung treffen Sie in Aufgabeteil (b)?
- (d) Welche der folgenden Zahlen sind durch 42 teilbar? Verifizieren Sie ihre Antwort, indem Sie eine ganze Zahl k finden, sodass $a = 42 \cdot k$.
- 33 84 462 540 – 728
- (e) Welche der folgenden Zahlen sind durch 14 teilbar? Verifizieren Sie ihre Antwort, indem Sie eine ganze Zahl k finden, sodass $a = 14 \cdot k$.
- 33 84 462 540 – 728
- (f) Sei a eine Zahl, die durch 42 teilbar ist. Welche Form hat die Zahl nach der Definition der Teilbarkeit?
- (g) Sei a eine Zahl, die durch 14 teilbar ist. Welche Form hat die Zahl nach der Definition der Teilbarkeit?
- (h) Geben Sie Aussagen a_1, \dots, a_n an, sodass die Implikationsfolge $p \rightarrow a_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_n \rightarrow q$ erfüllt ist.
- (i) Gebe für jeden Zwischenschritt in deiner obigen Implikationsfolge eine Begründung an.
- (j) Beweisen Sie den obigen Satz, d.h. zeigen Sie, dass jede Zahl, die durch 42 teilbar ist, auch durch 14 teilbar ist.
- (k) Zeigen Sie, dass die folgende Aussage gilt: “0 ist durch 15 teilbar”

Aufgabe 2 (Kontraposition)

Beweisen Sie: a sei eine ganze Zahl. Wenn a^{32} eine ungerade Zahl ist, dann ist a^4 ebenfalls eine ungerade Zahl.

- (a) Wie lautet die Voraussetzung p und die Folgerung q ?
- (b) Wie lauten die Negation von p und q ?
- (c) Welche Form hat eine Zahl, die gerade ist?
- (d) Finden Sie Zwischenaussagen, sodass die Implikationsreihenfolge $\neg q \rightarrow a_1 \cdots a_n \rightarrow \neg p$ gilt.
- (e) Begründen Sie die Schritte, die jeweils zur nächsten Zwischenaussage führen.
- (f) Beweisen Sie den obigen Satz.

Aufgabe 3 (Überprüfen von Aussagen)

Beweise oder widerlege (d.h. gebe ein Beispiel an, das zeigt, dass die Aussage nicht stimmen kann):

- (a) Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist und eine weitere Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist deren Summe durch 7 teilbar
- (b) Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist und eine weitere Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist deren Produkt durch 7 teilbar.
- (c) Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, dann ist dessen Quadrat ebenfalls durch 3 teilbar

Aufgabe 4 (Direkter Beweis durch Umformen)

Zeigen Sie durch Umformen, dass für $a \neq 1$ gilt:

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Aufgabe 5 (Beweis durch Widerspruch)

Es gilt: $a + b$ ist durch 7 teilbar, wenn a und b durch 7 teilbar sind

- (a) Wie lautet die Voraussetzung p und die Folgerung q ?
- (b) Wie lautet die Negation von q ?
- (c) Welche Form hat eine Zahl, die durch 7 teilbar ist?
- (d) Finde Zwischenaussagen a_1, \dots, a_n , sodass die Implikationsreihenfolge $(p \wedge \neg q) \rightarrow a_1 \cdots a_n \rightarrow f$ gilt, wobei \wedge eine Konjunktion (Verundung) der Aussagen (siehe auch Skript S.??) und f eine falsche Aussage darstellt.
- (e) Begründe die Schritte, die jeweils zur nächsten Zwischenaussage führen.
- (f) Beweise den obigen Satz durch Widerspruch.