STARKER START ins Studium

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Fachbereich Informatik und Mathematik
Institut für Informatik

Vorsemesterkurs Informatik

Sommersemester 2014

Aufgabenblatt Nr. 5A

Aufgabe 1 Summen und Produkte

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke ausführlich hin.

a) $\Sigma_{k=1}^{5} k^2$
b) $\Sigma_{k=1}^{9} 2$
c) $\Sigma_{i=1}^{6} \frac{1}{i}$
d) $\Pi_{k=1}^{9} 2$
e) $\Pi_{k=1}^{5} k^2$
f) $\Sigma_{i=1}^{3} \Pi_{k=1}^{4} ik$
g) $\Pi_{i=1}^{3} \Sigma_{k=1}^{4} ik$
h) $\Sigma_{i=1}^{5} \Sigma_{k=1}^{4} 1$
i) Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, gegeben durch $f(n) = (1 - 2n)$.
Berechne $\Sigma_{i=1}^{6} f(i)$. Was ist $\Sigma_{i=1}^{n} f(i)$?

Aufgabe 2 (ungerade Zahlen)

Summiert man die ersten ungeraden Zahlen, so erhält man *anscheinend* stets eine Quadratzahl:

$$\begin{array}{rrrrrcrl}
 & & & & 1 & = & 1 & = 1^2 \\
 & & & 3 & +1 & = & 4 & = 2^2 \\
 & & 5 & +3 & +1 & = & 9 & = 3^2 \\
 & 7 & +5 & +3 & +1 & = & 16 & = 4^2 \\
9 & +7 & +5 & +3 & +1 & = & 25 & = 5^2
\end{array}$$

Diesen Umstand sollen Sie in allgemeiner Form beweisen (s.u.). Hierzu ein paar Erläuterungen:

Eine *ungerade* Zahl lässt sich stets in der Form $2 \cdot n-1$ schreiben mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

In den obigen fünf Summen gilt: Ist der letzte Summand die Zahl $2n - 1$ so ist der Wert der Summe n^2. In der letzten Beispielzeile wird zum Beispiel bis $9 = 2 \cdot 5 - 1$ summiert und die Summe ergibt $25 = 5^2$.

Achtung: Dies alles ist nur eine Erläuterung der zu beweisenden Formel. Wir haben noch kein Beweis für den allgemeinen Fall geführt!

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2.$$

1. Welche Behauptung ist für den Induktionsanfang zu beweisen?
2. Wie lautet die Induktionsvoraussetzung?
3. Wie lautet die Induktionsbehauptung?

Hinweis: Beispiel 5.2 im Skript S.61 könnte weiterhelfen.

Aufgabe 3 (Induktive Argumentation)

Beweisen Sie durch induktive Argumentation folgende Aussage.
n Elemente lassen sich auf $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ Arten anordnen.

Aufgabe 4 (Rekursion)

Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei gegeben durch die Vorschrift

$$f(n) := \begin{cases} 3, & \text{falls } n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bereche $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ und $f(4)$.

Aufgabe 5 (rekursive Definition)

Gib eine rekursive Definition fib:$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die die Fibonacci-Zahlen berechnet. Die Fibonacci-Zahlen sind eine Folge von Zahlen, wobei die ersten beiden Zahlen 0 und 1 sind und die nachfolgende Zahl immer die Summe der beiden vorangegangenen Zahlen ist.
Die Folge beginnt also: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$.