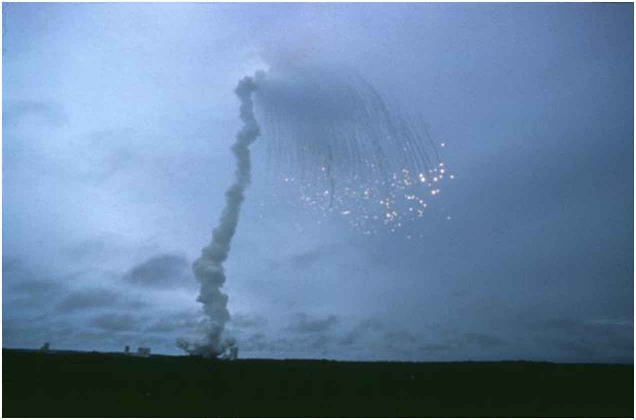
Beweistechniken

Vorkurs Informatik
SoSe14

07. April 2014

Wozu Beweise in der Informatik?



Quelle:http://www.capcomespace.net

Wozu Beweise in der Informatik?

Quelle: http://www.nileguide.com

Wozu Beweise in der Informatik?

... um Aussagen wie

1. “Das Programm erfüllt die gewünschte Aufgabe.”
2. “Das Programm führt zu keiner Endlosschleife.”
3. “Zur Lösung dieser Art von Problemen gibt es kein Patentrezept.”

auf ihren Wahrheitsgehalt zu prüfen, wenn unsere Intuition versagt.

Drei Beweistechniken

1. direkter Beweis
2. Beweis durch Kontraposition
3. Beweis durch Widerspruch

Aussagen

Definition (mathematische Aussage)

Eine mathematische Aussage ist eine Aussage, die entweder wahr oder falsch sein kann.

Beispiel (Aussagen)

- *Das Auto ist rot*
- *Eine Zahl ist durch 3 teilbar*
- $2 < 1$
- *Wenn es regnet, ist die Straße nass*

Beispiel (keine Aussagen)

- $1 + 2$, *es kann kein Wert (wahr oder falsch) zugeordnet werden*

Implikation

Definition (Implikation)

Seien p und q Aussagen. Aus Aussage p (Voraussetzung) folgt q (Folgerung), $p \to q$, falls gilt: Wenn p wahr ist, dann ist auch q wahr.

Wahrheitstafel:

p	q	$(p \to q)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Beispiel: Wenn der Bewohner rot ist, hat er grüne Haare. Beispiel:

Wenn der Bewohner rot ist, hat er grüne Haare.

Übersicht

- **direkter Beweis**
- Beweis durch Kontraposition
- Beweis durch Widerspruch

Direkter Beweis

Behauptungen wie

- Wenn eine Zahl durch 10 teilbar ist, dann auch durch 5.
- Die Summe zweier gerader Zahlen, ist gerade.
- Eine Zahl ist genau dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und 3 teilbar ist.
- ...

lassen sich durch die Methode des direkten Beweises zeigen.

Vorgehensweise beim direkten Beweis

Wir leiten *sukessive* und *in logisch nachvollziehbaren Schritten* die Behauptung her.
Dabei benutzen wir:

- Definitionen
- bereits bekannte Ergebnisse
- weitere Voraussetzungen (falls notwendig)

$$p$$

$$\downarrow$$

logische Schlussfolgerungen

$$\downarrow$$

$$q$$

Was brauchen wir?

Beispiel

Die Summe zweier gerader Zahlen ist wiederum eine gerade Zahl.

Definition (gerade Zahl)

Eine Zahl ist genau dann gerade, wenn sie durch 2 teilbar ist.

Definition (Teilbarkeit)

Eine Zahl a ist genau dann durch eine Zahl $b \neq 0$ teilbar, wenn es eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $a = b \cdot k$.

Beispiel für einen direkten Beweis I

Beispiel

Alle Primzahlen bis auf die 2 sind ungerade.

$$
\begin{aligned}
& \text{Sei } x \in \mathbb{N}, x \neq 2 \text{ eine Primzahl} \\
\Longrightarrow\ & x \text{ ist nur durch sich selbst und 1 teilbar} \\
\Longrightarrow\ & x \text{ ist } \textbf{nicht} \text{ durch } 2 \cdot k, k \in \mathbb{Z} \text{ darstellbar} \\
\Longrightarrow\ & x \text{ ist nicht gerade} \\
\Longrightarrow\ & x \text{ ist ungerade}
\end{aligned}
$$

$\square$

Beispiel für einen direkten Beweis II

Beispiel

Wenn eine Zahl durch 10 teilbar ist, dann auch durch 5.

Angenommen, wir haben eine durch 10 teilbare Zahl x.

$\Longrightarrow$ $x = 10k$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $x = 2 \cdot 5 \cdot k$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $x = 5 \cdot 2 \cdot k$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $x = 5 \cdot k'$, wobei $k' = 2k$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ x ist durch 5 teilbar, da $2k$ eine ganze Zahl ist, wenn k eine ganze Zahl ist.

$\square$

Übersicht

- direkter Beweis
- **Beweis durch Kontraposition**
- Beweis durch Widerspruch

Beweis durch Kontraposition

Beispiel

Wenn a^2 ungerade ist, dann ist a ungerade.

Problem: Es bietet sich kein direkter Beweis an.

Lösung: *Beweis durch Kontraposition*

Zurück zur Wahrheitstafel...

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

Fazit

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

Beispiel (Planet Zutan)

Wenn der Bewohner rot ist, hat er grüne Haare.
$\equiv$*Wenn der Bewohner keine grünen Haare hat, ist er auch nicht rot.*

Beispiel für einen Beweis durch Kontraposition I

Beispiel

Wenn a^2 ungerade ist, dann ist a ungerade.

Aussage	Negation
a^2 ist eine ungerade Zahl.	a^2 ist eine gerade Zahl.
a ist eine ungerade Zahl.	a ist eine gerade Zahl.

Wir zeigen also:

Satz

Wenn a gerade ist, ist auch a^2 gerade.

Beispiel für einen Beweis durch Kontraposition I

Satz

Wenn a gerade ist, ist auch a^2 gerade.

Beweis:

Sei a eine beliebige **gerade** Zahl.

$\Longrightarrow$ $a = 2 \cdot k$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2^2 \cdot k^2$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2 \cdot 2 \cdot k^2$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2 \cdot k'$ mit $k' = 2 \cdot k^2$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2 \cdot k'$ für eine ganze Zahl k'

$\Longrightarrow$ a^2 ist durch 2 teilbar, d.h. a^2 ist gerade.

$\square$

Beweis durch Kontraposition

Ziel: Beweis der Aussage

Satz (1)

Wenn a^2 ungerade ist, dann ist a ungerade.

Direkter Beweis schwierig, daher Beweis der **aussagenlogisch äquivalenten** Aussage:

Satz (2)

Wenn a gerade ist, dann ist a^2 ebenfalls gerade.

Damit haben wir Aussage 1 indirekt bewiesen.

Übersicht

- direkter Beweis
- Beweis durch Kontraposition
- **Beweis durch Widerspruch**

Beispiel für einen Beweis durch Widerspruch I

Beispiel

$\sqrt{3}$ *ist irrational.*

Problem: Wo sind Voraussetzung p und Folgerung q?
atomare Aussage
Weder ein direkter noch ein Beweis durch Kontraposition bieten sich an.

Lösung: Angenommen, $\sqrt{3}$ ist rational.
Wir wollen zeigen, dass das zu einem Widerspruch führt.

$\sqrt{3}$ ist irrational, Beweis durch Widerspruch

Angenommen, $\sqrt{3}$ ist rational.

$\Longrightarrow$ $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$, wobei a und b teilerfremd sind, d.h. $\text{ggT}(a, b) = 1$

$\Longrightarrow$ $3b^2 = a^2$

$\Longrightarrow$ a^2 ist durch 3 teilbar

$\Longrightarrow$ a ist durch 3 teilbar

$\Longrightarrow$ $a = 3 \cdot k, k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow$ $3b^2 = (3 \cdot k)^2$

$\Longrightarrow$ b^2 ist durch 3 teilbar

$\Longrightarrow$ b ist durch 3 teilbar

$\Longrightarrow$ 3 teilt sowohl a, wie auch b

$\Longrightarrow$ Widerspruch zu a und b sind teilerfremd.

$\Longrightarrow$ $\sqrt{3}$ ist irrational

$\square$

Beweistechniken

- direkter Beweis
  $p \to a_1 \to \cdots \to q$
- Beweis durch Kontraposition
  $\neg q \to a_1 \to \cdots \to \neg p$
- Beweis durch Widerspruch
  $\neg p \to a_1 \to \cdots \to$ Widerspruch (Falsche Aussage)

Worauf man beim Beweisen achten sollte

- Angabe der Beweistechnik am Anfang hilft dem Leser die Idee zu verstehen.
- keine Gedankensprünge im Beweis, nur leicht nachvollziehbare Schlussfolgerungen
- Kennzeichnung am Ende eines Beweises (z.B. durch $\square$)
- Bei längeren Beweisen ist zum Schluss ein kurzer Satz, was gezeigt wurde, hilfreich.