Asymptotik und Laufzeitanalyse

Vorsemesterkurs SoSe15
Ronja Düffel

25. März 2015

Laufzeitanalyse

Algorithmen = Rechenvorschriften

Wir fragen uns:

- Ist der Algorithmus effizient?
- welcher Algorithmus löst das Problem schneller?
- wie lange braucht der Algorithmus noch?

Ziel

Ziel

Die Laufzeit von Algorithmen verlässlich voraussagen.

Die Laufzeit hängt ab von:

- Eingabe
  - Größe
  - Struktur (z.B. vorsortierte Liste)
- ~~Hardware~~
  - ~~Architektur~~
  - ~~Taktfrequenz~~
- ~~Software~~
  - ~~Betriebssystem~~
  - ~~Programmiersprache~~
  - ~~Interpreter/Compiler/Assembler~~

Laufzeit

- Angabe der Laufzeit als Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ der Eingabegröße n.

Beispiel

$T_A(n) = 2n + 1$
$T_B(n) = \frac{1}{2}n^2 + 5$

- unabhängig von Hardware und Software
- Laufzeiten nach Wachstumsverhalten klassifizieren.

$\Rightarrow$ auf das Wesentliche beschränken

Asymptotik

Was ist das?

Definition (Asymptotische Analyse)

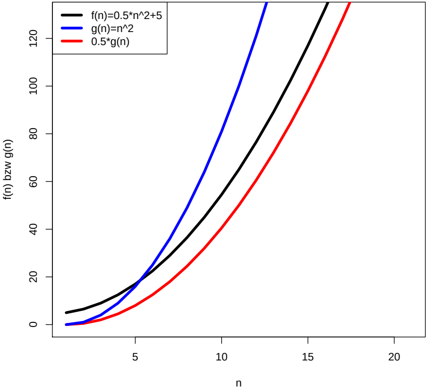
Methode um das Grenzverhalten von Funktionen zu `klassifizieren`, indem man nur den `wesentlichen` Trend des Grenzverhaltens beschreibt.

- wir ordnen Funktionen in „Klassen“
- mit Hilfe der Betrachtung des Wesentlichen

Was ist das Wesentliche?

Asymptotisch gleiches Wachstum

$\Theta(g) := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ |$ es gibt Konstanten $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)\}$.



$f = \Theta(g)$, da für $c_1 = 0.5$, $c_2 = 1$, $n_0 = 5$ und $n \geq n_0$ gilt:
$c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$

Asymptotisches Wachstum

Definition (asymptotisch gleiches Wachstum: Θ)

Seien f und g Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, und der Grenzwert der Folge $\frac{f(n)}{g(n)}$ möge existieren. Dann ist:

$$f = \Theta(g) :\Leftrightarrow 0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

- wir betrachten das Wachstum für **große** Werte von n

  $\Rightarrow$ Konstanten werden uninteressant

$\mathcal{O}$-Notation

Definition (Groß-O)

Seien f und g Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$,

$$\mathcal{O}(g) = \{f | \exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)\}.$$

in Worten:

- $\mathcal{O}(g)$ umfasst alle Funktionen f für die gilt: es existiert eine positive Konstante c und eine natürliche Zahl n_0, so dass $f(n) \leq c \cdot g(n)$, für alle $n \geq n_0$ gilt.

oder:

- die Funktionswerte von f sind ab einem gewissen $n_0 \leq$ einem Vielfachen von g.

$\mathcal{O}(g)$ ist eine Menge/Klasse von Funktionen
wir schreiben trotzdem: $f = \mathcal{O}(g)$

Asymptotisches Wachstum

Definition (asymptotisch langsameres/schnelleres Wachstum „$\prec$“)

$$f \prec g :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

„f wächst asymptotisch langsamer als g“

Transitivität: „g wächst asymptotisch schneller als f“

Man schreibt auch: $f = o(g)$ (sprich:„klein-o“)

Grenzwerte

Definition ($\mathcal{O}$-Notation über Grenzwerte)

Möge der Grenzwert der Folge $\frac{f(n)}{g(n)}$ existieren dann ist:

- $f = \mathcal{O}(g) :\Leftrightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty;$
  f wächst höchstens so schnell wie g
- $f = \Theta(g) :\Leftrightarrow 0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty;$
  f wächst genau so schnell wie g
- $f = o(g) :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0;$
  f wächst langsamer als g

$f = \Theta(g) \Leftrightarrow f = \mathcal{O}(g)$ und $g = \mathcal{O}(f)$

asymptotische Hackordnung

für beliebige Konstanten $0 < \epsilon < 1 < c$ gilt:

$$\underbrace{1}_{\text{konstant}} \prec \underbrace{\log\log n \prec \log n}_{\text{logarithmisch}} \prec \underbrace{n^{\epsilon} \prec n \prec n^{c}}_{\text{polynomiell}} \prec \underbrace{n^{\log n} \prec c^{n} \prec n! \prec n^{n} \prec c^{c^{n}}}_{\text{exponentiell}}$$

- hilfreiche innerliche Grundhaltung:

Denke im Großen!

Beispiele

- $1000n = \mathcal{O}(n)$
- $n^2 + 500n = \mathcal{O}(n^2)$
- $\log_a n = \mathcal{O}(\log_b n)$

Lehrsätze:

Die $\mathcal{O}$-Notation,...

- ... verschluckt in einem Produkt konstante Faktoren
- ... verschluckt in einer Summe mit konstant vielen Summanden, alle Summanden, außer den mit dem größten asymptotischen Wachstum
- ... unterscheidet nicht zwischen verschiedenen Basen des Logarithmus

Laufzeitanalyse

Warum?

Annahme: Ein einfacher Befehl benötigt 10^{-9}sec

n	n^2	n^3	n^{10}	2^n	$n!$
16	256	4.096	$\geq 10^{12}$	65536	$\geq 10^{13}$
32	1.024	32.768	$\geq 10^{15}$	$\geq 4 \cdot 10^9$	$\underbrace{\geq 10^{31}}$
64	4.096	262.144	$\underbrace{\geq 10^{18}}$	$\underbrace{\geq 6 \cdot 10^{19}}$	
					mehr als
128	16.384	2.097.152	mehr als	mehr als	10^{14} Jahre
256	65.536	16.777.216	10 Jahre	600 Jahre	
512	262.144	134.217.728			
1024	1.048.576	$\geq 10^9$			
10^6	$\underbrace{\geq 10^{12}}$	$\underbrace{\geq 10^{18}}$			
	mehr als	mehr als			
	15 Minuten	10 Jahre			

Beispiel 1

Algorithmus (zaehle(n))

```
1 function zaehle(n){
2   for(int i=1; i<=n; i++){
3     print i;
4   }
5 }
```

Laufzeit: Zähle die Anzahl der Befehle.

- $s_{3,3}$: Print-Befehl $\rightarrow 1$
- $s_{2,4}$: for-Schleife $\rightarrow \sum_{i=1}^{n} s_{3,3} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$
- $s_{1,5}$: nichts $\rightarrow s_{2,4} = n = O(n)$

Beispiel 2

Algorithmus (maximum($A[0..n]$))

```
function maximum(A[0..n]){
    int max = A[0];
    for(i = 1; i ≤ n; i++) do{
        if A[i] ≥ max{
            max = A[i];
        }
    }
    return max;
}
```

Laufzeit: $O(n)$ Lineare Suche

Beispiel 3

Algorithmus (insertionsort($A[0..n]$))

```
function insort(A[0..n]){
    for(i = 1; i ≤ n; i++) do{
        int x = A[i];
        int j = i;
        while j > 0 and A[j − 1] > x do{
            A[j] = A[j − 1];
            j = j − 1;
        }
        A[j] = x;
    }
}
```

Beispiel 3

Neu: Die Laufzeit hängt davon ab, wie häufig $s_{6,8}$ durchlaufen wird.

- Best-case Laufzeit: Die while-Schleife wird nie durchlaufen. $A[j-1] > x$ ist nie erfüllt; $A[0..n]$ ist bereits sortiert
- Worst-case Laufzeit: Die while-Schleife wird immer komplett durchlaufen. $A[j-1] > x$ ist immer erfüllt; $A[0..n]$ ist absteigend sortiert

Best-Case

$s_{6,7}$: 0

$s_{5,8}$: 2+0=2

$s_{3,9}$: 1+1+2+1=5

$s_{2,10}$: $\sum_{i=1}^{n}(s_{3,9}) = \sum_{i=1}^{n} 5 = 5n = \mathcal{O}(n)$

Worst-Case

$s_{6,7}$: 2

$s_{5,8}$: $\sum_{j=0}^{i}(s_{6,7}) = \sum_{j=0}^{i} 2$

$s_{3,9}$: $1 + 1 + (\sum_{j=0}^{i} 2) + 1 = 3 + \sum_{j=0}^{i} 2 = 3 + 2i$

$s_{2,10}$: $\sum_{i=1}^{n}(s_{3,9}) = \sum_{i=1}^{n}(3 + 2i)$

$s_{1,11}$: $s_{2,10} = \sum_{i=1}^{n}(3 + 2i) = \sum_{i=1}^{n} 3 + \sum_{i=1}^{n} 2i = 3n + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 3n + n^2 + n = \mathcal{O}(n^2)$

Beispiele häufiger Laufzeiten (1)

$f = O(1)$: f wird **nie** größer als ein konstanter Wert;
z.B. Zugriff auf das i-te Element eines Arrays.

$f = O(\log n)$: f wächst ungefähr um einen konstanten Betrag, wenn sich die Eingabelänge verdoppelt.
Teile-und-Herrsche-Prinzip; z.B. Binärsuche

$f = O(n)$: f wächst ungefähr auf das Doppelte, wenn sich die Eingabelänge verdoppelt.
jede Eingabestelle sehen; z.B. Lineare Suche

$f = O(n^2)$: f wächst ungefähr auf das vierfache, wenn sich die Eingabelänge verdoppelt.
z.B. einfache Sortieralgorithmen wie Selection Sort

Beispiele häufiger Laufzeiten (2)

$f = O(2^n)$: f wächst ungefähr auf das Doppelte, wenn sich die Eingabelänge um eins erhöht.
z.B. Untersuchung aller Teilmengen

$f = O(n!)$: f wächst ungefähr auf das $(n+1)$-fache, wenn sich die Eingabelänge um eins erhöht.
z.B. Untersuchung aller Permutationen

Summen : Hintereinander ausführen von Schleifen

Produkt : geschachtelte Schleifen

Orientierungsveranstaltung
Fachschaft Informatik
Freitag, 10.April 2015, 11:00 Uhr
Magnus-Hörsaal (hier!)