

Induktion und Rekursion

Vorsemesterkurs SoSe15
Ronja Düffel

24. März 2015

Vollständige Induktion

Vollständige Induktion

Ziel

Ziel

beweise, dass eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel

Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Der kleine Gauß



Der kleine Gauß

- **Aufgabe:** addiert die ersten 100 Zahlen zusammen
berechnet $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$

- **Vermutung:** Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

- **Beweis** durch vollständige Induktion

Summen und Produkte

Definition (Summen und Produkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ beliebige Zahlen. Dann ist:

- $\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_n$

insbesondere ist die leere Summe: $\sum_{i=1}^0 a_i = 0$.

- $\prod_{i=1}^n a_i := a_1 \cdot a_2 \dots a_n$

insbesondere ist das leere Produkt: $\prod_{i=1}^0 a_i = 1$.

Induktionsprinzip

Schließe vom Besonderen auf das Allgemeine.

- ❶ **Induktionsanfang:** Zeige, dass A für ein, oder einige kleine Werte von n gilt.
- ❷ **Induktionsschritt:** zeige, dass für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: falls $A(n)$ gilt, dann gilt auch $A(n+1)$.

Insbesondere gilt dann

- $A(1)$, wenn $A(0)$ wahr ist,

damit gilt aber auch

- $A(2)$, da $A(1)$ gilt,
- $A(3)$, da $A(2)$ gilt, usw.

Domino-Effekt

kleiner Gauß

Satz (kleiner Gauß)

$A(n)$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang: $A(1)$

Behauptung: Der Satz gilt für $n = 1$.

Beweis:

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

kleiner Gauß

Satz (kleiner Gauß)

$A(n)$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsschritt: $A(n) \rightarrow A(n+1)$

Induktionsvoraussetzung: Es gilt $A(n)$, also $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsbehauptung: Es gilt $A(n+1)$, also

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

kleiner Gauß

zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n+1} = 1 + 2 + \dots + n + (n+1)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n i \right) + (n+1)$$

Induktionsvoraussetzung anwenden

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

erweitern

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$(n+1)$ ausklammern

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Warum geht das?

① Wir haben die Behauptung für ein spezielles n direkt bewiesen

② Wir haben gezeigt:

Wenn die Behauptung für ein **beliebiges** n gilt,
dann gilt sie auch für den Nachfolger $n + 1$.

Damit kann dann für **alle** n argumentiert werden.

Was kann schiefgehen? (1)

Beispiel

Kein Induktionsanfang

$$A(5 \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar}) \rightarrow B(7 \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar})$$

- *logisch korrekte Schlussfolgerung*
- *Aussage ist trotzdem falsch, da Voraussetzung nicht gegeben ist.*

Was kann schiefgehen? (2)

Beispiel (kein konstruktives Argument im Induktionsschritt)

Behauptung: *In einen Koffer passen unendlich viele Socken.*

Induktionsanfang: $n = 1$ *In einen leeren Koffer passt ein Paar Socken.*

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Induktionsvoraussetzung: n Paar Socken passen in den Koffer.

Induktionsbehauptung: $n + 1$ Paar Socken passen in den Koffer.

Beweis: n Paar Socken befinden sich im Koffer. Aus Erfahrung weißman, ein Paar Socken passt immer noch rein.

$\Rightarrow n + 1$ Paar Socken passen in den Koffer.

$\Rightarrow$ unendlich viele Socken passen in den Koffer. ????

Konstruktives Argument hätte sagen müssen wo genau die Lücke für das extra Paar Socken ist.

Was kann schiefgehen? (3)

Beispiel (fehlerhafte Induktion)

Behauptung: *Alle Menschen einer Menge M mit $|M| = n$ sind gleich groß.*

Induktionsanfang: $n = 1$ *In einer Menge M in der sich nur ein Mensch befindet, sind alle Menschen gleich groß.*

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Sei $M = \{m_1, \dots, m_{n+1}\}$, $M' = \{m_1, \dots, m_n\}$ und $M'' = \{m_2, \dots, m_{n+1}\}$.

$|M'| = |M''| = n \Rightarrow$ die Menschen in M' und M'' sind jeweils gleich groß.

$m_2 \in M'$ und $m_2 \in M'' \Rightarrow$ alle Menschen in M' und M'' gleich groß.

$M = M' \cup M'' \Rightarrow$ alle Menschen in M sind gleich groß.

Induktionsschritt scheitert bei $n = 1$, da $M' = \{m_1\}$ und $M'' = \{m_2\}$.

Wann anwendbar?

- Beweis von Aussagen, die sich auf Objekte beziehen, die als natürliche Zahlen betrachtet werden können.
z.B. Geraden, Spielzüge, Menschen, Socken...
- es muss sich $A(n+1)$ aus $A(n)$ folgern lassen.
- Aussagen über rekursiv definierte Mengen oder Funktionen.

Rekursion

Rekursion

Definition

*Eine rekursive Funktion ist eine Funktion, die durch sich selbst definiert wird.
Rekursionsanfang: Fall (Fälle) für den die Funktion nicht wieder selbst aufgerufen wird*

Rekursionsschritt: rekursiver Aufruf der Funktion.

Beispiel (Fakultätsfunktion)

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Fakultätsfunktion

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 1 \cdot f(0) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$f(2) = 2 \cdot f(1) = 2 \cdot (1 \cdot f(0)) = 2 \cdot (1 \cdot 1) = 2$$

$$f(3) = 3 \cdot f(2) = 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 1)) = 6$$

Man schreibt auch $f(n) = n!$.

Satz

Für die Fakultätsfunktion $f(n)$ gilt: $f(n) = \prod_{i=1}^n i$.

Beweis durch vollständige Induktion

Induktionsanfang: $n = 0$

Behauptung: Der Satz gilt für $n = 0$.

Beweis: Es gilt: $f(0) = 1$. Ferner gilt: $\prod_{i=1}^0 i = 1$.

Somit gilt: $f(0) = 1 = \prod_{i=1}^0 i$.

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Induktionsvoraussetzung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f(n) = \prod_{i=1}^n i$.

Induktionsbehauptung: Es gilt: $f(n + 1) = \prod_{i=1}^{n+1} i$.

Induktionsbehauptung: Es gilt: $f(n+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i$.

Beweis:

$$f(n+1) = (n+1) \cdot f(n)$$

Induktionvoraussetzung

$$= (n+1) \cdot \prod_{i=1}^n i$$

$$= (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$= \prod_{i=1}^{n+1} i$$



Sind wir fertig?

① Wir haben die Behauptung für $n = 0$ gezeigt.

② Wir haben gezeigt:

Wenn die Behauptung für n gilt, **dann** gilt sie auch für $n + 1$.

wichtig: Verwendung der Induktionsvoraussetzung

Türme von Hanoi

Regeln:

- nur eine Scheibe bewegen
- niemals eine größere auf eine kleinere Scheibe legen.

Algorithmus Türme von Hanoi

Algorithmus

```
1 function hanoi(n, start, ziel, hilf){  
2   if (n > 1){  
3     hanoi(n-1,start,hilf,ziel)  
4   }  
5   verschiebe Scheibe n von start auf ziel  
6   if (n > 1){  
7     hanoi(n-1,hilf,ziel,start)  
8   }  
9 }
```

Korrektheit

Induktionsanfang: $n = 1$

Für eine Scheibe wird lediglich Zeile 5 ausgeführt, die Scheibe wird von start auf ziel gelegt. Alle Regeln werden beachtet. Der Algorithmus arbeitet für $n = 1$ Scheibe korrekt.

Induktionsschritt: $n \rightarrow (n + 1)$

Induktionsvoraussetzung: Für $n \geq 1$ Scheiben arbeitet der Algorithmus korrekt.

Induktionsbehauptung: Der Algorithmus arbeitet auch für $n + 1$ Scheiben korrekt.

Korrektheit Induktionsschritt

Induktionsbehauptung: Der Algorithmus arbeitet auch für $n + 1$ Scheiben korrekt.

Beweis:

`hanoi((n+1), start, ziel, hilf){ (Aufruf mit  $(n + 1)$ )`

 Bedingung $((n + 1) > 1)$ erfüllt, da $n \geq 1$. Also Aufruf

`hanoi(n, start, hilf, ziel)`

 Verschiebe Scheibe $(n + 1)$ von start auf ziel

 Bedingung $((n + 1) > 1)$ erfüllt, da $n \geq 1$. Also Aufruf

`hanoi(n, hilf, ziel, start)`

Laut Induktionsannahme verschiebt der Aufruf von `hanoi(n, start, hilf, ziel)` die obersten n Scheiben korrekt von start nach hilf. Danach wird Scheibe $n + 1$ von start nach ziel bewegt, anschließend werden durch den Aufruf `hanoi(n, hilf, ziel, start)` die n kleineren Scheiben korrekt von hilf nach ziel bewegt. Somit arbeitet der Algorithmus auch für $n + 1$ Scheiben korrekt. □

Anzahl der Spielzüge

$n = 1$	Schiebe 1 von A nach B	1 Zug
$n = 2$	$1 \rightarrow C, 2 \rightarrow B, 1 \rightarrow B$	3 Züge
$n = 3$	$1 \rightarrow B, 2 \rightarrow C, 1 \rightarrow C, 3 \rightarrow B, 1 \rightarrow A, 2 \rightarrow B, 1 \rightarrow B$	7 Züge

Satz

Um n Scheiben von einem Stapel zu einem anderen zu transportieren, werden mindestens $2^n - 1$ Spielzüge benötigt.

Beweis Anzahl der Spielzüge

Induktionsanfang: $n = 1$

Behauptung: Um eine Scheibe von A nach B zu setzen, werden $2^1 - 1 = 1$ Spielzüge benötigt.

Beweis: offensichtlich korrekt, wir setzen die Scheibe von A nach B.

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Induktionsvoraussetzung: Um n Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^n - 1$ Spielzüge benötigt.

Induktionsbehauptung: Um $n + 1$ Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^{n+1} - 1$ Spielzüge benötigt.

Induktionsbehauptung: Um $n + 1$ Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^{n+1} - 1$ Spielzüge benötigt.

Beweis:

- ① transportiere n Scheiben von start auf hilf
- ② transportiere Scheibe $n + 1$ von start auf ziel
- ③ transportiere n Scheiben von hilf auf ziel

$$2^n - 1 + 1 + 2^n - 1 = 2^n + 2^n - 1 + 1 - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

