

## Vorsemesterkurs Informatik

Sommersemester 2015

### Aufgabenblatt Nr. 6B

#### Aufgabe 1 (Beweis Lemma 6.9)

Sei  $a \in \mathbb{N}$ , und  $a, k > 1$  :

$$f_1(n) := \log_a n, \quad f_2(n) := n, \quad f_3(n) := n \cdot \log_a n, \quad f_4(n) := n^k, \quad f_5(n) := a^n$$

Zeigen Sie, dass  $f_i = O(f_{i+1})$  für  $1 \leq i \leq 4$ .

#### Aufgabe 2 ( $\mathcal{O}$ und $\Theta$ )

Seien  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  zwei Funktionen. Welche der folgenden Aussagen stimmen? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

- Wenn  $f \leq g$ , dann gilt  $f = \mathcal{O}(g)$ .
- Wenn  $f \leq 3 \cdot g$ , dann gilt  $f = \mathcal{O}(g)$ .
- Wenn  $f = \Theta(g)$ , dann ist  $f \leq g$  oder  $g \leq f$ .
- Wenn  $f = g$ , dann ist  $f = \Theta(g)$ .
- Wenn  $f = \Theta(g)$ , dann ist auch  $g = \Theta(f)$ .
- Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ , dann ist  $f = \mathcal{O}(g)$ .
- Wenn  $f = \mathcal{O}(g)$ , dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ .

#### Aufgabe 3 (Laufzeiten)

Für ein Problem seien 5 Algorithmen  $A_1, \dots, A_5$  gegeben, die das Problem lösen. Dabei benötigt Algorithmus  $A_i$ ,  $b_i(n)$  Operationen zur Lösung eines Problems mit Eingabelänge  $n$ . Es gilt:

$$b_1(n) = \log_2(n), \quad b_2(n) = n, \quad b_3(n) = n^2, \quad b_4(n) = 1000 \cdot n^2, \quad b_5(n) = 2^n$$

Wie verändert sich der Berechnungsaufwand, wenn

- die Eingabelänge verdoppelt wird?
- die Eingabelänge um 1 erhöht wird?

*Hinweis:* Überlegen Sie was *logarithmisches*, *lineares*, *quadratisches* und *exponentielles* Wachstum bedeutet. Falls Sie das nicht weiter bringt, setzen Sie  $2n$  bzw.  $(n+1)$  in die entsprechende Funktion ein, und formen Sie diese so um, dass Sie  $b_i(n)$  einsetzen können.

## Aufgabe 4 (Pseudocode)

Betrachten Sie die folgenden Algorithmen in Pseudocode.

- Versuchen Sie zu verstehen, welche Rechenvorschriften diese Algorithmen darstellen. (Auch wenn diese manchmal keinen tieferen Sinn haben)
- Geben Sie die Laufzeit in der  $\mathcal{O}$ -Notation an.

Algorithmus 1:

```
1 function algo_1(n){
2   zahl = 5;
3   for (int i = 1; i <= 5*n; i++){
4     zahl = zahl * 5;
5   }
6   while(zahl >= 1){
7     print zahl;
8     zahl--;
9   }
10 }
```

Algorithmus 2:

```
1 function algo_2[A[0..n], i, j]{
2   x=A[i];
3   A[i]=A[j];
4   A[j]=x;
5   return(A[0..n]);
6 }
```

Algorithmus 3:

```
1 function algo_3(A[0..n]){
2   zahl=0;
3   for (int i = 1; i <= n; i++){
4     if(A[i]<=A[zahl]){
5       zahl=i;
6     }
7   }
8   return(zahl);
9 }
```

Algorithmus 4:

```
1 function algo_4(A[0..n]){
2   for (int i=0; i<=n; i++){
3     zahl=algo_3(A[i..n]);
4     algo_2(A[0..n], i, zahl);
5   }
6   return(A[0..n])
7 }
```

*Tip:* Erinnern Sie sich, was die Funktion von `algo_3` und `algo_2` ist. Versuchen sie die einzelnen Zeilen in Anweisungen in menschlicher Sprache zu übersetzen. Falls das nicht hilft, wenden Sie den Algorithmus auf einen kleinen Array an.

Algorithmus 5:

```
1 function algo_5(A[0..n]){
2   for(int i=0; i<=n;i++){
3     for(int j=n; j>=i; j--){
4       if(A[j]<A[j-1]){
5         x=A[j];
6         A[j]=A[j-1];
7         A[j-1]=x;
8       }
9     }
10  }
11  return(A[0..n])
12 }
```