Logik und Beweise

Vorsemesterkurs SoSe16
Ronja Düffel

21. März 2016

Wozu Beweise in der Informatik?

- ... um Aussagen wie
  1. "Das Programm erfüllt die gewünschte Aufgabe."
  2. "Das Programm führt zu keiner Endlosschleife."
  3. "Für diese Art Probleme gibt es keine effiziente Lösung"

  auf ihren Wahrheitsgehalt zu prüfen, wenn unsere Intuition versagt.
- Richtigkeit eigener Gedanken beurteilen

Wozu Beweise in der Informatik?

Quelle:http://www.capcomespace.net

Wozu Beweise in der Informatik?

Quelle: http://www.nileguide.com

Aussagen

Definition (mathematische Aussage)

Eine mathematische Aussage ist eine Aussage, die entweder wahr oder falsch sein kann.

Aussage	**ja**	**nein**
Das Auto ist rot.	✓	
2 ist eine kleine Zahl.		✓
$2 < 1$	✓	
$1 + 2$		✓
Ist die Hose blau?		✓
Wenn es regnet, ist die Straße nass.	✓	
Dieser Satz ist falsch.		✓

Negation

Definition (Negation ($\neg$))

Die Negation einer Aussage $\neg A$ (sprich 'nicht A') ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Aussage: Das Haus ist alt und groß.

Negation:
(a) Das Haus ist nicht alt und nicht groß.
(b) Das Haus ist nicht alt oder nicht groß.
(c) Es gibt kein Haus das alt und groß ist.
(d) Es gibt ein Haus das alt und groß ist.

Negation

Definition (Negation ($\neg$))

Die Negation einer Aussage $\neg A$ (sprich 'nicht A') ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Aussage: Das Auto ist rot oder blau.

Negation:
(a) Das Auto ist nicht rot und nicht blau.
(b) Das Auto ist nicht rot oder nicht blau.
(c) Es gibt kein Auto das rot und blau ist.
(d) Es gibt ein Auto das rot oder blau ist.

Negation

Definition (Negation ($\neg$))

Die Negation einer Aussage $\neg A$ (sprich 'nicht A') ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Aussage: Alle Kinder spielen gern

Negation:
(a) Kein Kind spielt gern.
(b) Alle Kinder spielen nicht gern.
(c) Es gibt ein Kind das nicht gern spielt.
(d) Alle Kinder hassen Spiele.

Negation

Definition (Negation ($\neg$))

Die Negation einer Aussage $\neg A$ (sprich 'nicht A') ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Aussage: Es gibt blaue Elefanten.

Negation:
(a) Es gibt rosa Elefanten.
(b) Alle Elefanten sind nicht blau.
(c) Es gibt Elefanten die nicht blau sind
(d) Nicht alle Elefanten sind blau.

Negation

Definition (Negation ($\neg$))

Die Negation einer Aussage $\neg A$ (sprich 'nicht A') ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Aussage	negierte Aussage
Das Haus ist groß und alt.	Das Haus ist nicht groß oder nicht alt.
Das Auto ist rot oder blau.	Das Auto ist nicht rot und nicht blau.
Alle Kinder spielen gern.	Es gibt (mindestens) ein Kind, das nicht gerne spielt.
Es gibt blaue Elefanten.	Alle Elefanten sind nicht blau.

Merksatz: Negation vertauscht „und“ mit „oder“ und „Für alle“ mit „Es gibt“.

Implikation

Definition (Implikation)

Seien A und B Aussagen. Aus Aussage A (Voraussetzung) folgt B (Folgerung), $A \rightarrow B$, falls gilt: Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr.

Wahrheitstafel:

A	B	$(A \rightarrow B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Beispiel: Wenn der Bewohner rot ist, hat er grüne Haare. Beispiel:
$\underbrace{\text{Wenn der Bewohner rot ist}}_{A}$, $\underbrace{\text{hat er grüne Haare}}_{B}$.

Die mathematische Sprache

Formelsprache

Mathematische Sprache

Wissenschaftssprache

Geschriebene Sprache

Gehobene Alltagssprache:„Guten Tag. . . “

Alltagssprache:„Ei Gude wie?“

Warum ist Beweisen so schwierig?

- unsere natürliche Sprache ist oft mehrdeutig
- wir sind in unserem Alltag von logischen Fehlschlüssen umgeben
- Logik hilft beim Argumentieren und Aufschreiben von Beweisen
- beim *Finden* von Beweisen helfen:
  - **Erfahrung**
  - Problemlösungsstrategien
  - Kenntnis typischer Beweismuster

Beweis

Definition (Beweis)

Ein Beweis ist eine **logisch vollständige Begründung** *einer Aussage.*

Solange eine Aussage nicht bewiesen ist, kann es sein, dass sie falsch ist. Egal durch wie viele Beispiele sie gestützt wird.

FERMAT-Zahlen

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \text{ , für } n \in \mathbb{N}$$

Vermutung (1637): Alle F_n sind Primzahlen

Widerlegt (1732) von EULER: $F_5 = 4294967297$ ist durch 641 teilbar

Übersicht

- **direkter Beweis**
- Beweis durch Kontraposition
- Beweis durch Widerspruch

Vorgehensweise beim direkten Beweis

Wir leiten *sukessive* und *in logisch nachvollziehbaren Schritten* die Behauptung her.
Dabei benutzen wir:

- Definitionen
- bereits bekannte Ergebnisse
- weitere Voraussetzungen (falls notwendig)

$$A$$
$$\downarrow$$
logische Schlussfolgerungen
$$\downarrow$$
$$B$$

Beispiel

Die Summe zweier gerader Zahlen ist wiederum eine gerade Zahl.

Was brauchen wir?

Beispiel

Die Summe zweier gerader Zahlen ist wiederum eine gerade Zahl.

Definition (gerade Zahl)

Eine Zahl ist genau dann gerade, wenn sie durch 2 teilbar ist.

Definition (Teilbarkeit)

Eine Zahl a ist genau dann durch eine Zahl $b \neq 0$ teilbar, wenn es eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $a = b \cdot k$.

Beispiel für einen direkten Beweis I

Beispiel

Die Summe zweier gerader Zahlen ist wiederum eine gerade Zahl.

Seien a und b gerade Zahlen.

$\Rightarrow$ $a = 2 \cdot k,\ b = 2 \cdot l,\ k, l \in \mathbb{Z}$ (Def. gerade Zahlen)

$\Rightarrow$ $a + b = 2 \cdot k + 2 \cdot l = 2 \cdot (k + l)$ (Einsetzen, Ausklammern)

$\Rightarrow$ $a + b = 2 \cdot m, m = l + k, m \in \mathbb{Z}$ (Gruppeneigenschaft $(\mathbb{Z}, +)$)

$\Rightarrow$ $a + b$ ist durch 2 teilbar

$\Rightarrow$ $a + b$ ist gerade.

$\square$

Beispiel für einen direkten Beweis II

Beispiel

Wenn eine Zahl durch 10 teilbar ist, dann auch durch 5.

Angenommen, wir haben eine durch 10 teilbare Zahl x.

$\Longrightarrow$ $x = 10 \cdot k$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $x = 2 \cdot 5 \cdot k$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $x = 5 \cdot 2 \cdot k$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $x = 5 \cdot l$, wobei $l = 2 \cdot k$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ x ist durch 5 teilbar, da $2 \cdot k$ eine ganze Zahl ist, wenn k eine ganze Zahl ist.

$\square$

Beispiel für einen direkten Beweis III

Beispiel

Alle Primzahlen bis auf die 2 sind ungerade.

Sei $x \in \mathbb{N}, x \neq 2$ eine Primzahl

$\Longrightarrow$ x ist nur durch sich selbst und 1 teilbar

$\Longrightarrow$ x ist **nicht** durch $2 \cdot k, k \in \mathbb{Z}$ darstellbar

$\Longrightarrow$ x ist nicht gerade

$\Longrightarrow$ x ist ungerade

$\square$

Übersicht

- direkter Beweis
- **Beweis durch Kontraposition**
- Beweis durch Widerspruch

Beweis durch Kontraposition

Beispiel

Wenn a^2 gerade ist, dann ist a gerade.

Problem: Es bietet sich kein direkter Beweis an.

Lösung: *Beweis durch Kontraposition*

Zurück zur Wahrheitstafel...

A	B	$A \to B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \to \neg A$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1

Fazit

$A \to B \equiv \neg B \to \neg A$

Beispiel (Planet Zutan)

Wenn der Bewohner rot ist, hat er grüne Haare.
$\equiv$*Wenn der Bewohner keine grünen Haare hat, ist er auch nicht rot.*

Beispiel für einen Beweis durch Kontraposition I

Beispiel

Wenn a^2 gerade ist, dann ist a gerade.

Aussage	Negation
a^2 ist eine gerade Zahl.	a^2 ist eine ungerade Zahl.
a ist eine gerade Zahl.	a ist eine ungerade Zahl.

Wir zeigen also:

Satz

Wenn a ungerade ist, ist auch a^2 ungerade.

Beispiel für einen Beweis durch Kontraposition

Satz

Wenn a ungerade ist, ist auch a^2 ungerade.

Beweis:

Sei a eine beliebige **ungerade** Zahl.

$\Longrightarrow$ $a = 2 \cdot k + 1$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $a^2 = (2k+1)^2$ für eine ganze Zahl k (Quadrieren)

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2 \cdot 2 \cdot k^2 + 2(2k \cdot 1) + 1^2 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1^2$ (Binomische Formel, Ausklammern)

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2 \cdot l + 1$ mit $l = 2 \cdot k^2 + 2k$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2 \cdot l + 1$ für eine ganze Zahl l, da $2k^2 + 2k$ eine ganze Zahl ist, wenn k eine ganze Zahl ist (Gruppeneigenschaft $(\mathbb{Z}, +)$)

$\Longrightarrow$ a^2 ungerade.

$\square$

Beweis durch Kontraposition

Ziel: Beweis der Aussage

Satz (1)

Wenn a^2 gerade ist, dann ist a gerade.

Direkter Beweis schwierig, daher Beweis der **aussagenlogisch äquivalenten** Aussage:

Satz (2)

Wenn a ungerade ist, dann ist a^2 ebenfalls ungerade.

Damit haben wir Aussage 1 indirekt bewiesen.

Übersicht

- direkter Beweis
- Beweis durch Kontraposition
- **Beweis durch Widerspruch**

Beispiel für einen Beweis durch Widerspruch I

Beispiel

$\sqrt{2}$ ist irrational.

Problem: Wo sind Voraussetzung A und Folgerung B?
atomare Aussage
Weder ein direkter noch ein Beweis durch Kontraposition bieten sich an.

Lösung: Angenommen, $\sqrt{2}$ ist rational.
Wir wollen zeigen, dass das zu einem Widerspruch führt.

Beispiel Widerspruchsbeweis

Angenommen, $\sqrt{2}$ ist rational, also $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

$\Rightarrow$ $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$,mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$ (Definition $\mathbb{Q}$)

Nun ist $2 = \frac{p^2}{q^2}$ (Quadrieren) und $2 \cdot q^2 = p^2$ (Umformen)

$\Rightarrow$ p^2 ist durch 2 teilbar, da $q^2 \in \mathbb{Z}$ (Def. Teilbarkeit, Gruppeneigenschaft $(\mathbb{Z}, \cdot)$).

$\Rightarrow$ a ist durch 2 teilbar (bereits bewiesen)

und darstellbar als $p = 2 \cdot k, k \in \mathbb{Z}$ (Definition der Teilbarkeit)

$2 \cdot q^2 = (2 \cdot k)^2 \Leftrightarrow q^2 = 2 \cdot k^2$ ebenfalls durch 2 teilbar (Einsetzen und Def. Teilbarkeit),

und q ist ebenfalls durch 2 teilbar (bereits bewiesen).

Also teilt 2 sowohl p, wie auch q, was ein Widerspruch zu der Annahme ist, dass $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$.

Damit ist $\sqrt{2}$ irrational.

$\square$

Beweistechniken

- direkter Beweis
  $A \to A_1 \to \cdots \to B$
- Beweis durch Kontraposition
  $\neg B \to A_1 \to \cdots \to \neg A$
- Beweis durch Widerspruch
  $\neg A \to A_1 \to \cdots \to$ Widerspruch (Falsche Aussage)

Worauf man beim Beweisen achten sollte

- Angabe der Beweistechnik am Anfang hilft dem Leser die Idee zu verstehen.
- keine Gedankensprünge im Beweis, nur leicht nachvollziehbare Schlussfolgerungen
- Kennzeichnung am Ende eines Beweises (z.B. durch $\square$)
- Bei längeren Beweisen ist zum Schluss ein kurzer Satz, was gezeigt wurde, hilfreich.