

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer **Menge** und
- einer *einzelnen* **Rechenoperation** ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer Menge und “die Zahlen”
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer Menge und Platzhalter für Plus, Mal, UND, Geteilt, etc.
- einer *einzelnen* Rechenoperation,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer **Menge** und
- einer *einzelnen* **Rechenoperation** ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Das Invertieren (Rückgängigmachen) der Operation verstecken die Mathematiker in der Zahlenmenge:

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer Menge und
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Das Invertieren (Rückgängigmachen) der Operation verstecken die Mathematiker in der Zahlenmenge:

Leben ohne Geteilt-Taste

Der kleine Bruder macht Deine Rechnungen zu nichte:

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer Menge und
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Das Invertieren (Rückgängigmachen) der Operation verstecken die Mathematiker in der Zahlenmenge:

Leben ohne Geteilt-Taste

Der kleine Bruder macht Deine Rechnungen zu nichte:

mühevoll berechnetes Ergebnis

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

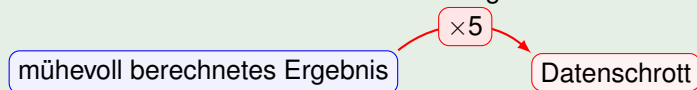
- einer Menge und
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Das Invertieren (Rückgängigmachen) der Operation verstecken die Mathematiker in der Zahlenmenge:

Leben ohne Geteilt-Taste

Der kleine Bruder macht Deine Rechnungen zu nichte:



Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

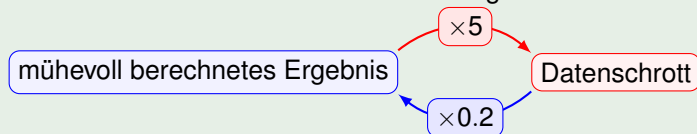
- einer Menge und
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Das Invertieren (Rückgängigmachen) der Operation verstecken die Mathematiker in der Zahlenmenge:

Leben ohne Geteilt-Taste

Der kleine Bruder macht Deine Rechnungen zu nichte:



Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer Menge und
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Das Invertieren (Rückgängigmachen) der Operation verstecken die Mathematiker in der Zahlenmenge:

Leben ohne Geteilt-Taste

Der kleine Bruder macht Deine Rechnungen zu nichte:

mühevoll berechnetes Ergebnis

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

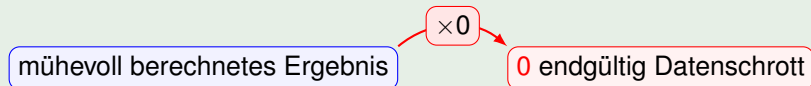
- einer Menge und
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Das Invertieren (Rückgängigmachen) der Operation verstecken die Mathematiker in der Zahlenmenge:

Leben ohne Geteilt-Taste

Der kleine Bruder macht Deine Rechnungen zu nichts:



Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

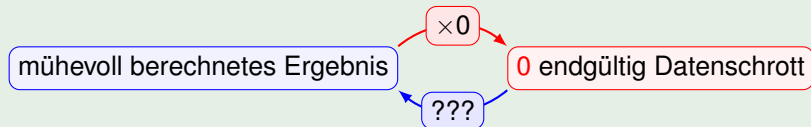
- einer Menge und
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Das Invertieren (Rückgängigmachen) der Operation verstecken die Mathematiker in der Zahlenmenge:

Leben ohne Geteilt-Taste

Der kleine Bruder macht Deine Rechnungen zu nichts:



Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer **Menge** und
- einer *einzelnen* **Rechenoperation** ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Das Invertieren (Rückgängigmachen) der Operation verstecken die Mathematiker in der Zahlenmenge:

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer **Menge** und
- einer *einzelnen* **Rechenoperation** ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Das Invertieren (Rückgängigmachen) der Operation verstecken die Mathematiker in der Zahlenmenge:

Eine erste Gruppe

Die Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ zusammen mit \cdot (**Multiplikation**) ist eine Gruppe.

Gruppen: Definition

Definition: Gruppe

Eine Gruppe ist ein Paar (G, \circ) aus einer Menge G und einer Verknüpfung \circ , so dass gelten:

G1 \circ ist **assoziativ**:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \text{ gilt für alle } a, b, c \in G$$

Gruppen: Definition

Definition: Gruppe

Eine Gruppe ist ein Paar (G, \circ) aus einer Menge G und einer Verknüpfung \circ , so dass gelten:

G1 \circ ist **assoziativ**:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \text{ gilt für alle } a, b, c \in G$$

G2 (G, \circ) ist **abgeschlossen**:

$$a \circ b \in G \text{ gilt für alle } a, b \in G$$

Gruppen: Definition

Definition: Gruppe

Eine Gruppe ist ein Paar (G, \circ) aus einer Menge G und einer Verknüpfung \circ , so dass gelten:

G1 \circ ist **assoziativ**:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \text{ gilt für alle } a, b, c \in G$$

G2 (G, \circ) ist **abgeschlossen**:

$$a \circ b \in G \text{ gilt für alle } a, b \in G$$

G2 **Ein Neutrales**:

Es gibt *ein* spezielles Element $e \in G$ mit:

$$e \circ a = a \quad \text{für alle } a \in G$$

Gruppen: Definition

Definition: Gruppe

Eine Gruppe ist ein Paar (G, \circ) aus einer Menge G und einer Verknüpfung \circ , so dass gelten:

G1 \circ ist **assoziativ**:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \text{ gilt für alle } a, b, c \in G$$

G2 (G, \circ) ist **abgeschlossen**:

$$a \circ b \in G \text{ gilt für alle } a, b \in G$$

G2 **Ein Neutrales**:

Es gibt *ein* spezielles Element $e \in G$ mit:

$$e \circ a = a \quad \text{für alle } a \in G$$

G2 **Viele Inversenpaare**:

Es gibt *für jedes* $a \in G$ ein $\bar{a} \in G$ mit:

$$\bar{a} \circ a = e$$

Gruppen: Definition

Definition: Gruppe

Eine Gruppe ist ein Paar (G, \circ) aus einer Menge G und einer Verknüpfung \circ , so dass gelten:

G1 \circ ist **assoziativ**:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \text{ gilt für alle } a, b, c \in G$$

G2 (G, \circ) ist **abgeschlossen**:

$$a \circ b \in G \text{ gilt für alle } a, b \in G$$

G2 **Ein Neutrales**:

Es gibt *ein* spezielles Element $e \in G$ mit:

$$e \circ a = a \quad a \circ e = a \quad \text{für alle } a \in G$$

G2 **Viele Inversenpaare**:

Es gibt *für jedes* $a \in G$ ein $\bar{a} \in G$ mit:

$$\bar{a} \circ a = e$$

Gruppen: Definition

Definition: Gruppe

Eine Gruppe ist ein Paar (G, \circ) aus einer Menge G und einer Verknüpfung \circ , so dass gelten:

G1 \circ ist **assoziativ**:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \text{ gilt für alle } a, b, c \in G$$

G2 (G, \circ) ist **abgeschlossen**:

$$a \circ b \in G \text{ gilt für alle } a, b \in G$$

G2 **Ein Neutrales**:

Es gibt *ein* spezielles Element $e \in G$ mit:

$$e \circ a = a \quad a \circ e = a \quad \text{für alle } a \in G$$

G2 **Viele Inversenpaare**:

Es gibt *für jedes* $a \in G$ ein $\bar{a} \in G$ mit:

$$\bar{a} \circ a = e \quad a \circ \bar{a} = e$$

Gruppen: Definition

Alternative Definition: Gruppe

Eine Gruppe (G, \circ) ist ein Paar

- aus einer Menge G und einer assoziativen Verknüpfung \circ
- so dass jede Gleichung der Form $a \circ x = b$ mit $a, b \in G$ genau eine Lösung $x \in G$ besitzt.

Gruppen: Definition

Alternative Definition: Gruppe

Eine Gruppe (G, \circ) ist ein Paar

- aus einer Menge G und einer assoziativen Verknüpfung \circ
- so dass jede Gleichung der Form $a \circ x = b$ mit $a, b \in G$ genau eine Lösung $x \in G$ besitzt.

$$\begin{aligned} & 5 \cdot x = 4 \quad | \cdot 0.2 \\ \Leftrightarrow & 0.2 \cdot (5 \cdot x) = 0.2 \cdot 4 \\ \Leftrightarrow & 0.2 \cdot (5 \cdot x) = 0.8 \\ \Leftrightarrow & (0.2 \cdot 5) \cdot x = 0.8 \\ \Leftrightarrow & \mathbf{1} \cdot x = 0.8 \\ \Leftrightarrow & x = 0.8 \end{aligned}$$

Gruppen: Definition

Alternative Definition: Gruppe

Eine Gruppe (G, \circ) ist ein Paar

- aus einer Menge G und einer assoziativen Verknüpfung \circ
- so dass jede Gleichung der Form $a \circ x = b$ mit $a, b \in G$ genau eine Lösung $x \in G$ besitzt.

$$\begin{aligned} & 5 \cdot x = 4 \quad | \cdot 0.2 \\ \Leftrightarrow & 0.2 \cdot (5 \cdot x) = 0.2 \cdot 4 \\ \Leftrightarrow & 0.2 \cdot (5 \cdot x) = 0.8 \\ \Leftrightarrow & (0.2 \cdot 5) \cdot x = 0.8 \\ \Leftrightarrow & 1 \cdot x = 0.8 \\ \Leftrightarrow & x = 0.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a \circ x = b \quad | \circ \bar{a} \\ \Leftrightarrow & \bar{a} \circ (a \circ x) = \bar{a} \circ b \\ \Leftrightarrow & \bar{a} \circ (a \circ x) = c \\ \Leftrightarrow & (\bar{a} \circ a) \circ x = c \\ \Leftrightarrow & e \circ x = c \\ \Leftrightarrow & x = c \end{aligned}$$

Gruppen: Definition

Alternative Definition: Gruppe

Eine Gruppe (G, \circ) ist ein Paar

- aus einer Menge G und einer assoziativen Verknüpfung \circ
- so dass jede Gleichung der Form $a \circ x = b$ mit $a, b \in G$ genau eine Lösung $x \in G$ besitzt.

$$\begin{array}{lcl} \Leftrightarrow & 5 \cdot x = 4 & | \cdot 0.2 \\ \Leftrightarrow & 0.2 \cdot (5 \cdot x) = 0.2 \cdot 4 & \\ \Leftrightarrow & 0.2 \cdot (5 \cdot x) = 0.8 & \\ \Leftrightarrow & (0.2 \cdot 5) \cdot x = 0.8 & \\ \Leftrightarrow & 1 \cdot x = 0.8 & \\ \Leftrightarrow & x = 0.8 & \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} \Leftrightarrow & a \circ x = b & | \circ \bar{a} \\ \Leftrightarrow & \bar{a} \circ (a \circ x) = \bar{a} \circ b & \\ \stackrel{G2}{\Leftrightarrow} & \bar{a} \circ (a \circ x) = c & \\ \stackrel{G1}{\Leftrightarrow} & (\bar{a} \circ a) \circ x = c & \\ \stackrel{G4}{\Leftrightarrow} & e \circ x = c & \\ \stackrel{G3}{\Leftrightarrow} & x = c & \end{array}$$

Alle Axiome der Gruppdefinition mussten verwendet werden!

Beispiele

$(\mathbb{N}, +)$ ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 0

Inverses zu 3 wäre: -3

(\mathbb{N}, \cdot) ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 1

Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0

Inverses zu 3 ist: -3

(\mathbb{Z}, \cdot) ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 1

Inverses zu 3 wäre $1/3$.

Beispiele

$(\mathbb{N}, +)$ ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 0

Inverses zu 3 wäre: -3

(\mathbb{N}, \cdot) ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 1

Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0

Inverses zu 3 ist: -3

(\mathbb{Z}, \cdot) ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 1

Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Q}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0

Inverses zu 3 ist: -3

(\mathbb{Q}, \cdot) ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 1

Inverses zu 0 wäre !?.

Beispiele

$(\mathbb{N}, +)$ ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 0

Inverses zu 3 wäre: -3

(\mathbb{N}, \cdot) ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 1

Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0

Inverses zu 3 ist: -3

(\mathbb{Z}, \cdot) ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 1

Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Q}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0

Inverses zu 3 ist: -3

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe

Beispiele

$(\mathbb{N}, +)$ ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 0

Inverses zu 3 wäre: -3

(\mathbb{N}, \cdot) ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 1

Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0

Inverses zu 3 ist: -3

(\mathbb{Z}, \cdot) ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 1

Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Q}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0

Inverses zu 3 ist: -3

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe

Beispiele

$(\mathbb{N}, +)$ ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 0

Inverses zu 3 wäre: -3

(\mathbb{N}, \cdot) ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 1

Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0

Inverses zu 3 ist: -3

(\mathbb{Z}, \cdot) ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 1

Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Q}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0

Inverses zu 3 ist: -3

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe

Beispiele

$(\mathbb{N}, +)$ ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 0

Inverses zu 3 wäre: -3

(\mathbb{N}, \cdot) ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 1

Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0

Inverses zu 3 ist: -3

(\mathbb{Z}, \cdot) ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 1

Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Q}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0

Inverses zu 3 ist: -3

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 1

Beispiele

$(\mathbb{N}, +)$ ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 0

Inverses zu 3 wäre: -3

(\mathbb{N}, \cdot) ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 1

Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0

Inverses zu 3 ist: -3

(\mathbb{Z}, \cdot) ist **keine** Gruppe

Neutrales Element: 1

Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Q}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0

Inverses zu 3 ist: -3

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 1

Inverses zu $a \neq 0$ ist $1/a$.