Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer Menge und
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer Menge und "die Zahlen"
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer Menge und
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

Platzahlter für Plus, Mal, UND, Geteilt,etc.

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer Menge und
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Das Invertieren (Rückgängigmachen) der Operation verstecken die Mathematiker in der Zahlenmenge:

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer Menge und
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Das Invertieren (Rückgängigmachen) der Operation verstecken die Mathematiker in der Zahlenmenge:

Leben ohne Geteilt-Taste

Der kleine Bruder macht Deine Rechnungen zu nichte:

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer Menge und
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Das Invertieren (Rückgängigmachen) der Operation verstecken die Mathematiker in der Zahlenmenge:

Leben ohne Geteilt-Taste

Der kleine Bruder macht Deine Rechnungen zu nichte:

mühevoll berechnetes Ergebnis

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer Menge und
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Das Invertieren (Rückgängigmachen) der Operation verstecken die Mathematiker in der Zahlenmenge:

Leben ohne Geteilt-Taste

Der kleine Bruder macht Deine Rechnungen zu nichte:

mühevoll berechnetes Ergebnis $\xrightarrow{\times 5}$ Datenschrott

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer Menge und
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Das Invertieren (Rückgängigmachen) der Operation verstecken die Mathematiker in der Zahlenmenge:

Leben ohne Geteilt-Taste

Der kleine Bruder macht Deine Rechnungen zu nichte:

$$\begin{tikzcd} \text{mühevoll berechnetes Ergebnis} \arrow[r, bend left, "\times 5"] & \text{Datenschrott} \arrow[l, bend left, "\times 0.2"] \end{tikzcd}$$

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer Menge und
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Das Invertieren (Rückgängigmachen) der Operation verstecken die Mathematiker in der Zahlenmenge:

Leben ohne Geteilt-Taste

Der kleine Bruder macht Deine Rechnungen zu nichte:

mühevoll berechnetes Ergebnis

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer Menge und
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Das Invertieren (Rückgängigmachen) der Operation verstecken die Mathematiker in der Zahlenmenge:

Leben ohne Geteilt-Taste

Der kleine Bruder macht Deine Rechnungen zu nichte:

mühevoll berechnetes Ergebnis $\xrightarrow{\times 0}$ 0 endgültig Datenschrott

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer Menge und
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Das Invertieren (Rückgängigmachen) der Operation verstecken die Mathematiker in der Zahlenmenge:

Leben ohne Geteilt-Taste

Der kleine Bruder macht Deine Rechnungen zu nichte:

$$\begin{tikzcd} \text{mühevoll berechnetes Ergebnis} \arrow[r, bend left, "\times 0"] & \text{0 endgültig Datenschrott} \arrow[l, bend left, "???"] \end{tikzcd}$$

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer Menge und
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Das Invertieren (Rückgängigmachen) der Operation verstecken die Mathematiker in der Zahlenmenge:

Gruppen: erste Anschauung

Die Gruppe: eine abstrakte Zahlenmenge

Eine Gruppe besteht aus

- einer Menge und
- einer *einzelnen* Rechenoperation ,

so dass innerhalb der Gruppe alle Rechenoperationen rückgängig machbar sind.

Das Invertieren (Rückgängigmachen) der Operation verstecken die Mathematiker in der Zahlenmenge:

Eine erste Gruppe

Die Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ zusammen mit $\cdot$ (Multiplikation) ist eine Gruppe.

Gruppen: Definition

Definition: Gruppe

Eine Gruppe ist ein Paar $(G, \circ)$ aus einer Menge G und einer Verknüpfung $\circ$, so dass gelten:

G1 $\circ$ ist **assoziativ**:
$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ gilt für alle $a, b, c \in G$

Gruppen: Definition

Definition: Gruppe

Eine Gruppe ist ein Paar $(G, \circ)$ aus einer Menge G und einer Verknüpfung $\circ$, so dass gelten:

G1 $\circ$ ist **assoziativ**:
$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ gilt für alle $a, b, c \in G$

G2 $(G, \circ)$ ist **abgeschlossen**:
$a \circ b \in G$ gilt für alle $a, b \in G$

Gruppen: Definition

Definition: Gruppe

Eine Gruppe ist ein Paar $(G, \circ)$ aus einer Menge G und einer Verknüpfung $\circ$, so dass gelten:

- **G1** $\circ$ ist **assoziativ**:
  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ gilt für alle $a, b, c \in G$
- **G2** $(G, \circ)$ ist **abgeschlossen**:
  $a \circ b \in G$ gilt für alle $a, b \in G$
- **G2** ***Ein* Neutrales**:
  Es gibt *ein* spezielles Element $\mathbf{e} \in G$ mit:
  $\mathbf{e} \circ a = a$ für alle $a \in G$

Gruppen: Definition

Definition: Gruppe

Eine Gruppe ist ein Paar $(G, \circ)$ aus einer Menge G und einer Verknüpfung $\circ$, so dass gelten:

G1 $\circ$ ist **assoziativ**:
$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ gilt für alle $a, b, c \in G$

G2 $(G, \circ)$ ist **abgeschlossen**:
$a \circ b \in G$ gilt für alle $a, b \in G$

G2 ***Ein* Neutrales**:
Es gibt *ein* spezielles Element $\mathbf{e} \in G$ mit:
$\mathbf{e} \circ a = a$ für alle $a \in G$

G2 ***Viele* Inversenpaare**:
Es gibt *für jedes* $a \in G$ ein $\overline{a} \in G$ mit:
$\overline{a} \circ a = \mathbf{e}$

Gruppen: Definition

Definition: Gruppe

Eine Gruppe ist ein Paar $(G, \circ)$ aus einer Menge G und einer Verknüpfung $\circ$, so dass gelten:

G1 $\circ$ ist **assoziativ**:
$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ gilt für alle $a, b, c \in G$

G2 $(G, \circ)$ ist **abgeschlossen**:
$a \circ b \in G$ gilt für alle $a, b \in G$

G2 ***Ein* Neutrales**:
Es gibt *ein* spezielles Element $\mathbf{e} \in G$ mit:
$\mathbf{e} \circ a = a \quad a \circ \mathbf{e} = a \quad$ für alle $a \in G$

G2 ***Viele* Inversenpaare**:
Es gibt *für jedes* $a \in G$ ein $\overline{a} \in G$ mit:
$\overline{a} \circ a = \mathbf{e}$

Gruppen: Definition

Definition: Gruppe

Eine Gruppe ist ein Paar $(G, \circ)$ aus einer Menge G und einer Verknüpfung $\circ$, so dass gelten:

G1 $\circ$ ist **assoziativ**:
$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ gilt für alle $a, b, c \in G$

G2 $(G, \circ)$ ist **abgeschlossen**:
$a \circ b \in G$ gilt für alle $a, b \in G$

G2 ***Ein* Neutrales**:
Es gibt *ein* spezielles Element $\mathbf{e} \in G$ mit:
$\mathbf{e} \circ a = a \quad a \circ \mathbf{e} = a \quad$ für alle $a \in G$

G2 ***Viele* Inversenpaare**:
Es gibt *für jedes* $a \in G$ ein $\overline{a} \in G$ mit:
$\overline{a} \circ a = \mathbf{e} \quad a \circ \overline{a} = \mathbf{e}$

Gruppen: Definition

Alternative Definition: Gruppe

Eine Gruppe $(G, \circ)$ ist ein Paar

- aus einer Menge G und einer assoziativen Verknüpfung $\circ$
- so dass jede Gleichung der Form $a \circ x = b$ mit $a, b \in G$ genau eine Lösung $x \in G$ besitzt.

Gruppen: Definition

Alternative Definition: Gruppe

Eine Gruppe $(G, \circ)$ ist ein Paar

- aus einer Menge G und einer assoziativen Verknüpfung $\circ$
- so dass jede Gleichung der Form $a \circ x = b$ mit $a, b \in G$ genau eine Lösung $x \in G$ besitzt.

$$\begin{array}{rrcl|l}
 & 5 \cdot x & = & 4 & \cdot 0.2 \\
\Leftrightarrow & 0.2 \cdot (5 \cdot x) & = & 0.2 \cdot 4 & \\
\Leftrightarrow & 0.2 \cdot (5 \cdot x) & = & 0.8 & \\
\Leftrightarrow & (0.2 \cdot 5) \cdot x & = & 0.8 & \\
\Leftrightarrow & \mathbf{1} \quad \cdot x & = & 0.8 & \\
\Leftrightarrow & x & = & 0.8 &
\end{array}$$

Gruppen: Definition

Alternative Definition: Gruppe

Eine Gruppe $(G, \circ)$ ist ein Paar

- aus einer Menge G und einer assoziativen Verknüpfung $\circ$
- so dass jede Gleichung der Form $a \circ x = b$ mit $a, b \in G$ genau eine Lösung $x \in G$ besitzt.

$$
\begin{array}{rrcll}
 & 5 \cdot x & = & 4 & \mid \cdot 0.2 \\
\Leftrightarrow & 0.2 \cdot (5 \cdot x) & = & 0.2 \cdot 4 & \\
\Leftrightarrow & 0.2 \cdot (5 \cdot x) & = & 0.8 & \\
\Leftrightarrow & (0.2 \cdot 5) \cdot x & = & 0.8 & \\
\Leftrightarrow & 1 \quad \cdot x & = & 0.8 & \\
\Leftrightarrow & x & = & 0.8 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrcll}
 & a \circ x & = & b & \mid \circ \overline{a} \\
\Leftrightarrow & \overline{a} \circ (a \circ x) & = & \overline{a} \circ b & \\
\Leftrightarrow & \overline{a} \circ (a \circ x) & = & c & \\
\Leftrightarrow & (\overline{a} \circ a) \circ x & = & c & \\
\Leftrightarrow & \mathbf{e} \quad \circ x & = & c & \\
\Leftrightarrow & x & = & c &
\end{array}
$$

Gruppen: Definition

Alternative Definition: Gruppe

Eine Gruppe $(G, \circ)$ ist ein Paar

- aus einer Menge G und einer assoziativen Verknüpfung $\circ$
- so dass jede Gleichung der Form $a \circ x = b$ mit $a, b \in G$ genau eine Lösung $x \in G$ besitzt.

$$
\begin{aligned}
& & 5 \cdot x &= 4 & &\mid \cdot 0.2 \\
&\Leftrightarrow & 0.2 \cdot (5 \cdot x) &= 0.2 \cdot 4 \\
&\Leftrightarrow & 0.2 \cdot (5 \cdot x) &= 0.8 \\
&\Leftrightarrow & (0.2 \cdot 5) \cdot x &= 0.8 \\
&\Leftrightarrow & 1 \cdot x &= 0.8 \\
&\Leftrightarrow & x &= 0.8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& & a \circ x &= b & &\mid \circ \overline{a} \\
&\Leftrightarrow & \overline{a} \circ (a \circ x) &= \overline{a} \circ b \\
&\overset{G2}{\Leftrightarrow} & \overline{a} \circ (a \circ x) &= c \\
&\overset{G1}{\Leftrightarrow} & (\overline{a} \circ a) \circ x &= c \\
&\overset{G4}{\Leftrightarrow} & \mathbf{e} \circ x &= c \\
&\overset{G3}{\Leftrightarrow} & x &= c
\end{aligned}
$$

Alle Axiome der Gruppendefinition mussten verwendet werden!

Beispiele

$(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe

Neutrales Element: 0
Inverses zu 3 wäre: -3

$(\mathbb{N}, \cdot)$ ist keine Gruppe

Neutrales Element: 1
Inverses zu 3 wäre $^1/_3$.

$(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0
Inverses zu 3 ist: -3

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe

Neutrales Element: 1
Inverses zu 3 wäre $^1/_3$.

Beispiele

$(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe

Neutrales Element: 0
Inverses zu 3 wäre: -3

$(\mathbb{N}, \cdot)$ ist keine Gruppe

Neutrales Element: 1
Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0
Inverses zu 3 ist: -3

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe

Neutrales Element: 1
Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Q}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0
Inverses zu 3 ist: -3

$(\mathbb{Q}, \cdot)$ ist keine Gruppe

Neutrales Element: 1
Inverses zu 0 wäre ?!?.

Beispiele

$(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe

Neutrales Element: 0
Inverses zu 3 wäre: -3

$(\mathbb{N}, \cdot)$ ist keine Gruppe

Neutrales Element: 1
Inverses zu 3 wäre $^1/_3$.

$(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0
Inverses zu 3 ist: -3

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe

Neutrales Element: 1
Inverses zu 3 wäre $^1/_3$.

$(\mathbb{Q}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0
Inverses zu 3 ist: -3

$(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe

Beispiele

$(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe

Neutrales Element: 0
Inverses zu 3 wäre: -3

$(\mathbb{N}, \cdot)$ ist keine Gruppe

Neutrales Element: 1
Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0
Inverses zu 3 ist: -3

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe

Neutrales Element: 1
Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Q}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0
Inverses zu 3 ist: -3

$(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe

Beispiele

$(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe

Neutrales Element: 0
Inverses zu 3 wäre: -3

$(\mathbb{N}, \cdot)$ ist keine Gruppe

Neutrales Element: 1
Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0
Inverses zu 3 ist: -3

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe

Neutrales Element: 1
Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Q}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0
Inverses zu 3 ist: -3

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe

Beispiele

$(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe
Neutrales Element: 0
Inverses zu 3 wäre: -3

$(\mathbb{N}, \cdot)$ ist keine Gruppe
Neutrales Element: 1
Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe
Neutrales Element: 0
Inverses zu 3 ist: -3

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe
Neutrales Element: 1
Inverses zu 3 wäre $1/3$.

$(\mathbb{Q}, +)$ ist eine Gruppe
Neutrales Element: 0
Inverses zu 3 ist: -3

$(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe
Neutrales Element: 1

Beispiele

$(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe

Neutrales Element: 0
Inverses zu 3 wäre: -3

$(\mathbb{N}, \cdot)$ ist keine Gruppe

Neutrales Element: 1
Inverses zu 3 wäre $^1/_3$.

$(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0
Inverses zu 3 ist: -3

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe

Neutrales Element: 1
Inverses zu 3 wäre $^1/_3$.

$(\mathbb{Q}, +)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 0
Inverses zu 3 ist: -3

$(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe

Neutrales Element: 1
Inverses zu $a \neq 0$ ist $^1/_a$.