Induktion und Rekursion

Vorsemesterkurs
Sommersemester 2017
Ronja Düffel

23. März 2017

Der kleine Gauß

Der kleine Gauß

- **Aufgabe:** addiert die ersten 100 Zahlen zusammen

  berechnet $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$

- **Vermutung:** Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- **Beweis** durch vollständige Induktion

Summen und Produkte

Definition (Summen und Produkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebige Zahlen. Dann ist:

- $\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

  insbesondere ist die leere Summe: $\sum_{i=1}^{0} a_i = 0$.

- $\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \ldots a_n$

  insbesondere ist das leere Produkt: $\prod_{i=1}^{0} a_i = 1$.

Vollständige Induktion

Vollständige Induktion

Ziel

Ziel

beweise, dass eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel

Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsprinzip

Schließe vom Besonderen auf das Allgemeine.

1. **Induktionsanfang:** Zeige, dass A für ein, oder einige kleine Werte von n gilt.
2. **Induktionsschritt:** zeige, dass für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: falls $A(n)$ gilt, dann gilt auch $A(n+1)$.

Insbesondere gilt dann

- $A(2)$, wenn $A(1)$ wahr ist,

damit gilt aber auch

- $A(3)$, da $A(2)$ gilt,
- $A(4)$, da $A(3)$ gilt, usw.

Domino-Effekt

kleiner Gauß

Satz (kleiner Gauß)

$A(n)$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang: $A(1)$

Behauptung: Der Satz gilt für $n = 1$.

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

kleiner Gauß

Satz (kleiner Gauß)

$A(n)$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsschritt: $A(n) \to A(n+1)$

Induktionsvoraussetzung: Es gilt $A(n)$, also $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsbehauptung: Es gilt $A(n+1)$, also

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

kleiner Gauß

zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} &= 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) \\
&= (\sum_{i=1}^{n} i) + (n+1) && \text{Induktionsvoraussetzung anwenden} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \text{erweitern} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} && (n+1) \text{ ausklammern} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}
\end{aligned}$$

$\square$

Warum geht das?

1. Wir haben die Behauptung für ein spezielles n direkt bewiesen
2. Wir haben gezeigt:

   Wenn die Behauptung für ein **beliebiges** n gilt,

   dann gilt sie auch für den Nachfolger $n + 1$.

Damit kann dann für **alle** n argumentiert werden.

Was kann schiefgehen? (1)

Beispiel

Kein Induktionsanfang

$$A(5 \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar}) \rightarrow B(7 \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar})$$

- *logisch korrekte Schlussfolgerung*
- *Aussage ist trotzdem falsch, da Voraussetzung nicht gegeben ist.*

Was kann schiefgehen? (2)

Beispiel

Behauptung: *In einen Koffer passen unendlich viele Socken.*
Induktionsanfang: $n = 1$ *In einen leeren Koffer passt ein Paar Socken.*
Induktionsschritt: $n \to n + 1$
Induktionsvoraussetzung: n Paar Socken passen in den Koffer.
Induktionsbehauptung: $n + 1$ *Paar Socken passen in den Koffer.*
Beweis: n Paar Socken befinden sich im Koffer. Aus Erfahrung weiß man, ein Paar Socken passt immer noch rein.
$\Rightarrow$ $n + 1$ *Paar Socken passen in den Koffer.*
$\Rightarrow$ *unendlich viele Socken passen in den Koffer.* **????**

Was kann schiefgehen? (2)

Beispiel (kein konstruktives Argument im Induktionsschritt)

Behauptung: *In einen Koffer passen unendlich viele Socken.*
Induktionsanfang: $n = 1$ *In einen leeren Koffer passt ein Paar Socken.*
Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$
Induktionsvoraussetzung:n Paar Socken passen in den Koffer.
Induktionsbehauptung: $n + 1$ *Paar Socken passen in den Koffer.*
Beweis: n Paar Socken befinden sich im Koffer. Aus Erfahrung weißman, ein Paar Socken passt immer noch rein.
$\Rightarrow$ $n + 1$ *Paar Socken passen in den Koffer.*
$\Rightarrow$ *unendlich viele Socken passen in den Koffer.* **????**

Konstruktives Argument hätte sagen müssen wo genau die Lücke für das extra Paar Socken ist.

Was kann schiefgehen? (3)

Beispiel

Behauptung: *Alle Menschen einer Menge M mit $|M| = n$ sind gleich groß.*
Induktionsanfang: $n = 1$ *In einer Menge M in der sich nur ein Mensch befindet, sind alle Menschen gleich groß.*
Induktionsschritt: $n \to n + 1$
Sei $M = \{m_1, \ldots, m_{n+1}\}$, $M' = \{m_1, \ldots, m_n\}$ und $M'' = \{m_2, \ldots, m_{n+1}\}$.
$|M'| = |M''| = n \Rightarrow$ *die Menschen in M' und M'' sind jeweils gleich groß*
$m_2 \in M'$ *und* $m_2 \in M'' \Rightarrow$ *alle Menschen in M' und M'' gleich groß.*
$M = M' \cup M'' \Rightarrow$ *alle Menschen in M sind gleich groß.*

Was kann schiefgehen? (3)

Beispiel (fehlerhafte Induktion)

Behauptung: *Alle Menschen einer Menge M mit $|M| = n$ sind gleich groß.*
Induktionsanfang:$n = 1$ *In einer Menge M in der sich nur ein Mensch befindet, sind alle Menschen gleich groß.*
Induktionsschritt:$n \rightarrow n + 1$
Sei $M = \{m_1, \ldots, m_{n+1}\}$, $M' = \{m_1, \ldots, m_n\}$ und $M'' = \{m_2, \ldots, m_{n+1}\}$.
$|M'| = |M''| = n \Rightarrow$ die Menschen in M' und M'' sind jeweils gleich groß.
$m_2 \in M'$ und $m_2 \in M'' \Rightarrow$ alle Menschen in M' und M'' gleich groß.
$M = M' \cup M'' \Rightarrow$ alle Menschen in M sind gleich groß.

Induktionsschritt scheitert bei $n = 1$, da $M' = \{m_1\}$ und $M'' = \{m_2\}$.

Wann anwendbar?

- Beweis von Aussagen, die sich auf Objekte beziehen, die als natürliche Zahlen betrachtet werden können.
  z.B. Geraden, Spielzüge, Menschen, Socken...
- es muss sich $A(n+1)$ aus $A(n)$ folgern lassen.
- Aussagen über rekursiv definierte Mengen oder Funktionen.

Rekursion

Rekursion

Rekursion

Definition

Eine rekursive Funktion ist eine Funktion, die durch sich selbst definiert wird.
Rekursionsanfang: Fall (Fälle) für den (die) die Funktion nicht wieder selbst aufgerufen wird
Rekursionsschritt: rekursiver Aufruf der Funktion.

Beispiel (Fakultätsfunktion)

$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Fakultätsfunktion

$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(1) &= 1 \cdot f(0) = 1 \cdot 1 = 1 \\ f(2) &= 2 \cdot f(1) = 2 \cdot (1 \cdot f(0)) = 2 \cdot (1 \cdot 1) = 2 \\ f(3) &= 3 \cdot f(2) = 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 1)) = 6 \end{aligned}$$

Man schreibt auch $f(n) = n!$

Satz

Für die Fakultätsfunktion $f(n)$ gilt: $f(n) = \prod_{i=1}^{n} i$.

Beweis durch vollständige Induktion

Induktionsanfang: $n = 0$

Behauptung: Der Satz gilt für $n = 0$.

Beweis: Es gilt: $f(0) = 1$. Ferner gilt: $\prod_{i=1}^{0} i = 1$.
Somit gilt: $f(0) = 1 = \prod_{i=1}^{0} i$.

Induktionsschritt: $n \to n+1$

Induktionsvoraussetzung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f(n) = \prod_{i=1}^{n} i$.

Induktionsbehauptung: Es gilt: $f(n+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i$.

Induktionsbehauptung: Es gilt: $f(n+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i$.

Beweis:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= (n+1) \cdot f(n) && \text{Induktionvoraussetzung} \\ &= (n+1) \cdot \prod_{i=1}^{n} i \\ &= (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \\ &= \prod_{i=1}^{n+1} i \end{aligned}$$

$\square$

Sind wir fertig?

1. Wir haben die Behauptung für $n = 0$ gezeigt.
2. Wir haben gezeigt:

   Wenn die Behauptung für n gilt, **dann** gilt sie auch für $n + 1$.

   wichtig: Verwendung der Induktionsvoraussetzung

Türme von Hanoi

Regeln:

- nur eine Scheibe bewegen
- niemals eine größere auf eine kleinere Scheibe legen.

Algorithmus Türme von Hanoi

Algorithmus

```
function hanoi(n, start, ziel, hilf){
    if (n > 1){
        hanoi(n-1,start,hilf,ziel)
    }
    verschiebe Scheibe n von start auf ziel
    if (n > 1){
        hanoi(n-1,hilf,ziel,start)
    }
}
```

Beweis Korrektheit (1)

Induktionsanfang: $n = 1$

Behauptung: Der Algorithmus arbeitet für 1 Scheibe korrekt.
Beweis: Aufruf `hanoi(1,start, ziel, hilf)`; lediglich Zeile 5 wird ausgeführt und die Scheibe wird vom Start- auf den Zielstapel gelegt. Dabei wird keine Regel verletzt, denn es gibt nur eine Scheibe. Also kann auch nur eine Scheibe bewegt werden und sie kann auch nicht auf eine kleinere gelegt werden.

Beweis Korrektheit (2)

Induktionsschritt: $n \to n+1$
Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \geq 1$ Scheiben arbeitet der Algorithmus korrekt.
Induktionsbehauptung: Für $n+1$ Scheiben arbeitet der Algorithmus korrekt.
Beweis: Aufruf `hanoi(n+1,start,ziel,hilf)`; da $n+1 \geq 2$, wird Zeile 3 ausgeführt. Also Aufruf `hanoi(n,start,hilf,ziel)`; laut Induktionsvoraussetzung (IV), versetzt dieser Aufruf n Scheiben regelkonform vom Start- auf den Hilfsstapel. Nun befinden sich die oberen n Scheiben auf dem Hilfsstapel, Scheibe $n+1$ befindet sich auf dem Startstapel und der Zielstapel ist leer. Dementsprechend wird auch bei der anschließenden Ausführung von Zeile 5 keine Regel verletzt, wenn Scheibe $n+1$ vom Start- auf den Zielstapel bewegt wird. Anschließend wird `hanoi,n, hilf, ziel, start)` aufgerufen. Laut IV versetzt dieser Aufruf n Scheiben regelkonform vom Hilfs- auf den Zielstapel. Also arbeitet der Algorithmus auch für $n+1$ Scheiben korrekt. $\square$

Anzahl der Spielzüge

$n = 1$	Schiebe 1 von A nach B	1 Zug
$n = 2$	$1 \curvearrowright$ C, $2 \curvearrowright$ B, $1 \curvearrowright$ B	3 Züge
$n = 3$	$1 \curvearrowright$ B, $2 \curvearrowright$ C ,$1 \curvearrowright$ C, $3 \curvearrowright$ B, $1 \curvearrowright$ A, $2 \curvearrowright$ B, $1 \curvearrowright$ B	7 Züge

Satz

Um n Scheiben von einem Stapel zu einem anderen zu transportieren, werden mindestens $2^n - 1$ Spielzüge benötigt.

Beweis Anzahl der Spielzüge

Induktionsanfang: $n = 1$

Behauptung: Um eine Scheibe von A nach B zu setzen, werden $2^1 - 1 = 1$ Spielzüge benötigt.

Beweis: offensichtlich korrekt, wir setzen die Scheibe von A nach B.

Induktionsschritt: $n \to n + 1$

Induktionsvoraussetzung: Um n Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^n - 1$ Spielzüge benötigt.

Induktionsbehauptung: Um $n + 1$ Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^{n+1} - 1$ Spielzüge benötigt.

Induktionsbehauptung: Um $n+1$ Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^{n+1}-1$ Spielzüge benötigt.

Beweis:

1. transportiere n Scheiben von start auf hilf
2. transportiere Scheibe $n+1$ von start auf ziel
3. transportiere n Scheiben von hilf auf ziel

$$2^n - 1 + 1 + 2^n - 1 = 2^n + 2^n - 1 + 1 - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

$\square$

Turm von Benares

- bei 64 Scheiben, benötigen die Mönche $2^{64} - 1$ Züge
- bei 1 Zug pro Sekunde sind das 18 446 744 073 709 551 614 Sekunden
- das entspricht ca. 584 942 417 400 Jahren