Tag 2a - Induktion und Rekursion

Aufgabe 1: Quiz Summen und Produkte

1.

1. Welche(r) Term(e) ergeben 14?
   a) $\sum_{i=2}^{5} i$
   b) $\sum_{i=1}^{3}(2^i - 1)$
   c) $\sum_{i=0}^{3}(5 - i)$
2. Welche(r) Term(e) ergeben 7?
   a) $\sum_{i=1}^{7} i$
   b) $\sum_{i=3}^{4}(2i - i)$
   c) $\sum_{i=1}^{7} 1$
3. Welche(r) Term(e) ergeben 15?
   a) $\prod_{i=0}^{1}\prod_{j=0}^{2}(2j + i)$
   b) $\prod_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{2}(2j + i)$
   c) $\sum_{i=0}^{1}\prod_{j=0}^{2}(2j + i)$

Aufgabe 2: Quiz Rekursion

Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ terminieren immer?
Hinweis: $\mathbb{N}_0$ bezeichnet die natürlichen Zahlen inklusive der 0.

(a)

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 1, & \text{falls } n = 1 \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst} \end{cases}$$

(b)

$$f(n) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ f(n-1) + f(n-2), & \text{sonst} \end{cases}$$

(c)

$$f(n) := \begin{cases} 5, & \text{falls } n = 1 \\ 3 + f(n/2), & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 5 - f(n+1), & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 3: Rekursion

Die Funktion $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sei gegeben durch die Vorschrift

$$f(n) := \begin{cases} 3, & \text{falls } n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ und $f(4)$.

Aufgabe 4: Ungerade Zahlen

Summiert man die ersten ungeraden Zahlen, so erhält man *anscheinend* stets eine Quadratzahl:

$$\begin{array}{rcrcl} 1 & = & 1 & = & 1^2 \\ 3+1 & = & 4 & = & 2^2 \\ 5+3+1 & = & 9 & = & 3^2 \\ 7+5+3+1 & = & 16 & = & 4^2 \\ 9+7+5+3+1 & = & 25 & = & 5^2 \end{array}$$

Dieser Umstand soll in allgemeiner Form bewiesen werden (s.u.). Hierzu ein paar Erläuterungen:
Eine *gerade* Zahl lässt sich in der Form $2 \cdot n$ schreiben mit $n \in \mathbb{N}_0$.
Eine *ungerade* Zahl lässt sich in der Form $2 \cdot n + 1$ schreiben mit $n \in \mathbb{N}_0$.
In den obigen fünf Summen gilt: Ist der letzte Summand die Zahl $2n + 1$, so ist der Wert der Summe$(n + 1)^2$. In der letzten Beispielzeile wird bis $9 = 2 \cdot 4 + 1$ summiert und die Summe ergibt $(4 + 1)^2 = 5^2$.

Achtung: Dies alles ist nur eine Erläuterung der zu beweisenden Formel. Wir haben noch keinen Beweis für die allgemeine Formel geführt!

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$$

.

Aufgabe 5: Rekursive Definition

Gib eine rekursive Funktion $\mathrm{fib}\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ an, die die Fibonacci-Zahlen berechnet. Die Fibonacci-Zahlen sind eine Folge von Zahlen, wobei die ersten beiden Zahlen 0 und 1 sind und die nachfolgende Zahl immer die Summe der beiden vorangegangenen Zahlen ist. Die Folge lautet also: $0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$

Aufgabe 6: Rekursion und Induktion

n Personen treffen sich und jede schüttelt jeder anderen einmal die Hand. Wie viele Händedrücke gibt das? Löse das Problem rekursiv.

Viel Erfolg!