1 Matrizen

Aufgabe 1 Matrix-Multiplikation als Linearkombination der Spalten: Die Firma *Soylent Green* möchte einen neuen Ernährungsriegel herstellen. Dazu verwenden sie die folgenden Zutaten:

	Zutat		
Nährwert je $100\,\mathrm{g}$	**M**ilch**p**ulver	**S**oja**m**ehl	**G**eheim**z**utat*
Eiweiß	$16\,\mathrm{g}$	$40\,\mathrm{g}$	$32\,\mathrm{g}$
Fett	$32\,\mathrm{g}$	$16\,\mathrm{g}$	$16\,\mathrm{g}$
Kohlehydrate	$48\,\mathrm{g}$	$32\,\mathrm{g}$	$0\,\mathrm{g}$

$\star$ aus lokaler Erzeugung, garantiert nicht aus Tieren.

a) Diese Zutaten werden mit folgenden Anteilen gemischt: $^2/_8$ Mp, $^1/_8$ Sm und $^5/_8$ Gz.

Wieviel Eiweß, Fett & Kohlehydrate einthält das Endprodukt je $100\,\mathrm{g}$?

Berechnen Sie die Lösung Produkt als Produkt einer Matrix mit einem Vektor. Es ist sinnvoll mit Brüchen ($^a/_b$) statt mit Dezimalbrüchen ($0,125$) zu rechnen.

b) Lassen sich die Zutaten so mischen, dass das Resultat von allen Nährwerten gleich viel enthält?

Statt ein Gleichungssystem (Gaussverfahren) zu lösen, versuchen Sie es mit Paaren von Zutaten! Zeigen Sie dann per "Produkt-einer-Matrix-mit-einem-Vektor" dass Ihre Lösung richtig ist.

Aufgabe 2 Matrix-Multiplikation als "Zeile-mal-Spalte": Ein Pizzabäcker will die folgenden Pizzen mit den jeweils angegebenen Zutaten backen:

Pizza	Zutaten
Margherita	Teig, Tomatensoße, Käse
Funghi	Teig, Tomatensoße, Käse, Pilze
Salami	Teig, Tomatensoße, Käse, $\frac{1}{2}$ Packung Salami
Pizza „mit allem“ & doppelt Käse	Teig, Tomatensoße, $2\times$Käse, 1 Packung Salami, Pilze,

An verschiedenen Stichtagen (Tag 1 und Tag 2) hatten diese Rohzutaten verschiedene Preise:

Zutat	Preis an Tag 1	Preis an Tag 2
Teig	2,00 €	1,50 €
Tomatensauce	1,50 €	1,00 €
Käse	2,50 €	1,00 €
Pilze	1,00 €	2,00 €
Salami	3,00 €	5,00 €

Formulieren Sie für beide Tage die Berechnung der Einkaufspreise der Pizzen als Matrixmultiplikation und führen Sie diese durch (der Einkaufspreis einer Pizza ist der Preis aller ihrer Zutaten).

Aufgabe 3 Sei $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $a), b)$ und $c)$ und lösen Sie dann $d)$ mit diesen Ergebnissen ohne erneute Rechnungen durchzuführen.

a) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4 Gegeben sind die folgenden Matrizen: $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $A + B$, $A - B$,
b) Berechnen und vergleichen Sie $A^T + B$ und $A + B^T$,
c) Berechnen und vergleichen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

2 Gruppen

Aufgabe 5

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

		wahr	falsch
a)	Die Menge $\mathbb{Z}$ zusammen mit der gewöhnlichen Addition $+$ ist eine Gruppe.	☐	☐
b)	Die Menge $\mathbb{Z}$ zusammen mit der gewöhnlichen Multiplikation $\cdot$ ist eine Gruppe.	☐	☐
c)	Die Menge $\{\text{falsch}, \text{wahr}\}$ zusammen mit dem Operator $\wedge$ (und) ist eine Gruppe.	☐	☐
d)	Die Menge der Zahlen, die Ihre Taschenrechner-App "sich merken kann" ist zusammen mit der gewöhnlichen Addition $+$ eine Gruppe.	☐	☐

Aufgabe 6 (Der gewöhnliche $\mathbb{R}^2$ bildet mit Vektoraddition eine Gruppe).

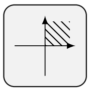
Definition: $\mathbb{R}^2 := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ : \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ ist der bekannte zwei-dimensionale Vektorraum.

Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ist die Addition wie üblich definiert als: $\vec{x} \oplus \vec{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$

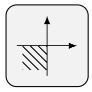
Das Paar $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ ist eine Gruppe (das müssen Sie nicht zeigen).

a) Bestimmen Sie das neutrale Element in $(\mathbb{R}^2, \oplus)$. b) Bestimmen Sie das inverse Element zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Betrachten Sie nun den **positiven** und den **negativen** Quadranten, also die Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, die wie folgt definiert sind:



$$\mathbb{R}^2_{\geq 0} := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \} \qquad \mathbb{R}^2_{\leq 0} := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 \leq 0, x_2 \leq 0 \}$$



c) Ist $(\mathbb{R}^2_{\geq 0}, \oplus)$ eine Gruppe? d) Ist $(\mathbb{R}^2_{\geq 0} \cup \mathbb{R}^2_{\leq 0}, \oplus)$ eine Gruppe?

Aufgabe 7 (Rechnen mit Resten).

Definition: Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei $\text{Rest}_7(n)$ der Rest, der beim Teilen von n durch 7 entsteht.

Zum Beispiel gilt $\text{Rest}_7(\mathbf{23}) = \mathbf{2}$ wegen $\mathbf{23} = 3 \cdot 7 + \mathbf{2}$ sowie $\text{Rest}_7(3) = 3$ und $\text{Rest}_7(0) = 0$.

Definition: Für Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ sei $n \odot_7 m := \text{Rest}_7(n \cdot m)$.

Das Paar $(\{1,2,3,4,5,6\}, \odot_7)$ ist eine (symmetrische) Gruppe (das muss/soll nicht bewiesen werden).

a) Bestimmen Sie das neutale Element der Gruppe.

b) Bestimmen Sie für jedes Element der Gruppe das zugehörige Inverse Element.

c) Auch mit der "Multiplikation" $\odot_7$ kann man Potenzen bilden, indem man zum Beispiel $\odot_7 3$ mehrfach hintereinander ausführt:

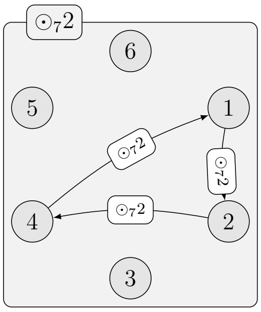
$$\begin{aligned} 3^1 &= 1 \odot_7 3 &&= 3 \\ 3^2 &= 1 \odot_7 3 \odot_7 3 &&= 3 \odot_7 3 = \mathbf{2} \end{aligned} \qquad 3^3 = \underbrace{\mathbf{1} \odot_7 \mathbf{3} \odot_7 \mathbf{3}}_{\mathbf{3^2=2}} \odot_7 3 = \mathbf{2} \odot_7 3 = 6$$

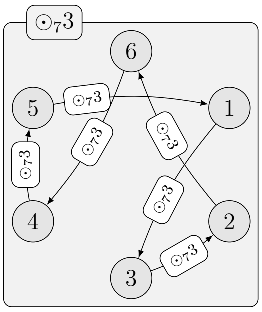
Zeichnen Sie einen Graphen (Kreise und Pfeile) für die wiederholte Multiplikation "$\odot_7 5$":

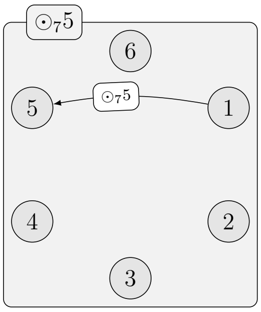
c1) Start: Beginnen Sie bei $a = 1$.

c2) berechnen Sie $b = a \odot_7 5$ und zeichen sie einen Pfeil von a nach b.

c3) setzen Sie $a := b$ und kehren machen Sie wieder bei 2) weiter.







Beobachtung: In dieser Gruppe gilt $a^6 = 1$ für alle $a \in \{1,2,3,4,5,6\}$, manchmal gilt sogar $a^3 = 1$.

d) Warum sehen sich die Graphen für "$\odot_7 3$" und "$\odot_7 5$" so ähnlich?

Aufgabe 8 (Abstrakte Gruppe). Es sei $G := \{a, b, c, d, g, h\}$ und $\circ : G \times G \to G$ eine Verknüpfung mit der folgenden Verknüpfungstabelle:

		$\mathbf{y} =$					
$\mathbf{x} \circ \mathbf{y}$		a	b	c	d	g	h
$\mathbf{x} =$	a	c	g	b	a	h	d
	b	g	d	h	b	a	c
	c	b	h	g	c	d	a
	d	a	b	c	d	g	h
	g	h	a	d	g	c	b
	h	d	c	a	h	b	g

Die Paar $(G, \circ)$ bildet eine Gruppe (dies muss/soll nicht bewiesen werden).

a) Nennen Sie das neutrale Element e in $(G, \circ)$.

b) Bestimmen Sie für alle Elemente in G jeweils das Inverse Element.

c) Lösen Sie die Gleichung $c \circ x = d$ (dh. bestimmen Sie dasjenige $x \in G$, das die Gleichung erfüllt).

d) Zeigen Sie, dass für die Elemente a, b, c das Assoziativgesetz $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ gilt.

e) Nennen Sie alle **Quadrate** in $(G, \circ)$, d.h. Elemente $\mathbf{x} \in G$ der Form $\mathbf{x} = \mathbf{y} \circ \mathbf{y}$ mit $\mathbf{y} \in G$.