Tag 1b - Aussagenlogik und Mengen

Aufgabe 1: Mengendarstellung

(a) Beschreiben Sie folgende Mengen umgangssprachlich

(i) $\{x|x \in \mathbb{Z},\text{ es ex. } k \in \mathbb{Z}, x = 3 \cdot k\}$

(ii) $\{x^3|x \in \mathbb{Z}, x^2 > 3\}$

(iii) $\{x|x \in \mathbb{Z}, 3x + 2 < 1\}$

(iv) $\{(x, y)|x, y \text{ sind Menschen}, x \neq y, \text{Eltern von } x = \text{Eltern von } y\}$

(b) Die Mengen $A_1 := \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 := \{2, 4, 5\}$, $A_3 := \{3, 4, 5, 6\}$ und $A_4 := \{4, 5, 6, 7\}$ sind gegeben. Beschreiben Sie die folgenden Mengen in extensionaler Form.

(i) $\bigcup_{i=1}^{3} A_i$

(ii) $\bigcap_{j=1}^{4} A_j$

(iii) $\bigcup_{k=2}^{4} (A_k \setminus A_{k-1})$

Solution:

(a) (i) Die Menge aller ganzen Zahlen, die durch 3 teilbar sind.

(ii) Die Menge der Kubikzahlen aller ganzer Zahlen, deren Quadrat größer ist als 3. Das gilt für alle ganzen Zahlen, außer -1, 0 und 1.

(iii) Die Menge aller ganzen Zahlen die Lösung der Ungleichung $3x + 2 < 1$ sind. Das sind alle ganzen Zahlen < 0.

iv) Die Menge aller Geschwisterpaare.

(b) (i) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(ii) $\{4\}$

(iii) $\{3, 5, 6, 7\}$

Aufgabe 2: Logische Negation

Gib zu den folgenden Aussagen jeweils die Gegenaussage (Negation) an. Tipp: überlege dir zuerst, welche Aussagenteile „immer“ (d.h. „für alle“), und welche „manchmal“ (d.h. „es existiert“) gelten.

(a) Wenn es regnet, ist die Straße nass.

(b) Es gibt kein Tier, das genau ein Ohr und genau zwei Augen hat.

(c) Alle Quadrate von ganzen Zahlen sind gerade.

(d) Für jeden Vorschlag gibt es jemanden, der ihn kritisiert.

(e) Keine Regel ohne Ausnahme.

(f) In manchen Häusern gibt es nicht in jeder Wohnung fließendes Wasser.

Solution:

(a) Manchmal bleibt die Straße trocken, obwohl es regnet.

(b) Es gibt mindestens ein Tier, das genau ein Ohr und genau zwei Augen hat.

(c) Es gibt eine ganze Zahl, deren Quadrat ungerade ist.

(d) Es gibt einen Vorschlag, der von niemandem kritisiert wird.

(e) Es existiert eine Regel, zu der es keine Ausnahme gibt.

(f) Alle Wohnungen in allen Häusern haben fließendes Wasser.

Aufgabe 3: Aussagenlogik: Formalisierung

Übersetze die folgenden Aussagen in Implikationen, indem du geeignete Abkürzungen wie etwa M für Mathematiker verwendest.

(a) Gemütliche Menschen stehen erst nach 9:00 Uhr auf.

(b) Wer nicht gemütlich ist, ist hektisch.

(c) Wer nicht ruhig ist, kann kein Mathematiker sein.

(d) Wer hektisch ist, ist nicht ruhig.

Prüfe, ob sich aus den obigen Aussagen die Aussage „Mathematiker stehen erst nach 9:00 Uhr auf“ folgern lässt.

Solution: G stehe für „gemütlich“, H für „hektisch“, M für „Mathematiker“, N für „steht nach 9 Uhr auf“, R für „ruhig“.

(a)
1. Gemütliche Menschen stehen erst nach 9:00 Uhr auf.
2. $(G \to N)$

(b)
1. Wer nicht gemütlich ist, ist hektisch.
2. $(\neg G \to H)$

(c)
1. Wer nicht ruhig ist, kann kein Mathematiker sein.
2. $(\neg R \to \neg M)$

(d)
1. Wer hektisch ist, ist nicht ruhig.
2. $(H \to \neg R)$

Die dritte Aussage ist äquivalent zu

$$(M \to R),$$

also sind alle Mathematiker ruhig.

Die vierte Aussage ist äquivalent zu

$$(R \to \neg H),$$

also sind alle Mathematiker nicht hektisch.

Die zweite Aussage ist äquivalent zu

$$(\neg H \to G),$$

also sind alle Mathematiker gemütlich. Aus der ersten Aussage folgt die Behauptung, dass Mathematiker erst nach 9 Uhr aufstehen.

Aufgabe 4: Aussagenlogische Umformung **schwierig**

(a) Stelle die Biimplikation (auch: Äquivalenz) „$\leftrightarrow$“ durch eine Kombination der Verknüpfungen „$\rightarrow$“, „$\wedge$“ dar.

(b) Stelle die Implikation „$\rightarrow$“ durch eine Kombination der Verknüpfungen „$\neg$“, „$\vee$“ dar.

(c) Zeige, dass sich die Verknüpfung „$\wedge$“ durch eine Kombination der Verknüpfungen „$\neg$“, „$\vee$“ darstellen lässt, dass also Disjunktion und Negation ausreichend sind, um die komplette Semantik der Aussagenlogik abzubilden.

(d) Zeige, dass sich die Verknüpfung „$\vee$“ durch eine Kombination der Verknüpfungen „$\neg$“, „$\wedge$“ darstellen lässt, dass also Konjunktion und Negation ausreichend sind, um die komplette Semantik der Aussagenlogik abzubilden.

Solution:

(a) „$A \Leftrightarrow B$“ ist äquivalent zu „$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$“.

(b) „$A \rightarrow B$“ ist äquivalent zu „$(\neg A \vee B)$“.

(c) „$(A \wedge B)$“ ist äquivalent zu „$\neg(\neg A \vee \neg B)$“.

(d) „$(A \vee B)$“ ist äquivalent zu „$\neg(\neg A \wedge \neg B)$“.

Aufgabe 5: De Morgan’sche Gesetze

Zeigen Sie durch Umformen, dass folgende Äquivalenzen gelten:

(a) **Absorptionsgesetze**

1. $(A \vee (A \wedge B)) \equiv A$
2. $(A \wedge (A \vee B)) \equiv A$

(b) **De Morgan’sche Gesetze**

1. $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$
2. $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$

Solution: Die einfache Variante sind Wahrheitstabellen (siehe Blatt a), die schwierige Umformungen. Die Umformungen sind aber richtig schwierig. Evtl. für das erste gemeinsam an der Tafel machen, und dann das zweite selbst versuchen.

(a) **Absorptionsgesetze**

1.

$$\begin{aligned}
(A \vee (A \wedge B)) &\equiv ((A \wedge 1) \vee (A \wedge B)) && \text{Neutralitätsgesetz, Tertium non Datur (1)}\\
&\equiv (A \wedge (1 \vee B)) && \text{Distributivgesetz}\\
&\equiv (A \wedge 1) && \text{Dominanzgesetz, Tertium non Datur (2)}\\
&\equiv A && \text{Neutralitätsgesetz, Tertium non Datur (1)}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(A \wedge (A \vee B)) &\equiv ((A \vee 0) \wedge (A \vee B)) && \text{Neutralitätsgesetz, Tertium non Datur (4)}\\
&\equiv (A \vee (0 \wedge B)) && \text{Distributivgesetz}\\
&\equiv (A \vee 0) && \text{Dominanzgesetz, Tertium non Datur (3)}\\
&\equiv A && \text{Neutralitätsgesetz, Terium non Datur (4)}
\end{aligned}$$

(b) **De Morgan’sche Gesetze**

1.

$$
\begin{aligned}
\neg(A \wedge B) &\equiv (\neg A \vee \neg B) \\
0 &\equiv (\neg A \vee \neg B) \wedge (A \wedge B) && \text{vergl. } B \equiv A \Rightarrow 0 \equiv A \wedge \neg B \\
0 &\equiv ((A \wedge B) \wedge \neg A) \vee ((A \wedge B) \wedge \neg B) \\
0 &\equiv \neg A \wedge A \wedge B) \vee (A \wedge B \wedge \neg B) \\
0 &\equiv (0 \wedge B) \vee (A \wedge 0) \\
0 &\equiv 0 \vee 0 \\
0 &\equiv 0
\end{aligned}
$$

Um das ganze wasserdicht zu machen zeigt man auch noch:

$$
\begin{aligned}
1 &\equiv ((\neg A \vee \neg B) \vee (A \wedge B)) \\
1 &\equiv (((A \wedge B) \vee \neg A) \vee ((A \wedge B) \vee \neg B)) \\
1 &\equiv (((A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg A)) \vee ((A \wedge B) \vee (B \vee \neg B))) \\
1 &\equiv ((1 \wedge (B \vee \neg A)) \vee ((A \vee \neg B) \wedge 1)) \\
1 &\equiv ((B \vee \neg A) \vee (A \vee \neg B)) \\
1 &\equiv ((A \vee \neg A) \vee (B \vee \neg B)) \\
1 &\equiv (1 \vee 1) \\
1 &\equiv 1
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
\neg(A \vee B) &\equiv (\neg A \wedge \neg B) \\
0 &\equiv ((\neg A \wedge \neg B) \wedge (A \vee B)) \\
0 &\equiv ((\neg A \wedge (A \vee B)) \wedge (\neg B \wedge (A \vee B))) \\
0 &\equiv (((\neg A \wedge A) \vee (\neg A \wedge B)) \vee ((\neg B \wedge B) \vee (\neg B \wedge A))) \\
0 &\equiv ((0 \vee (\neg A \wedge B)) \wedge (0 \vee (\neg B \wedge A))) \\
0 &\equiv ((\neg A \wedge B) \wedge (\neg B \wedge A)) \\
0 &\equiv ((\neg A \wedge A) \wedge (\neg B \wedge B)) \\
0 &\equiv (0 \wedge 0) \\
0 &\equiv 0
\end{aligned}
$$

Und für die 1 muss man's auch noch zeigen, analog zu oben.

Viel Erfolg!