# Tag 2a - Beweistechniken

## Aufgabe 1: Direkter Beweis

Betrachte den folgenden Satz

**Satz 1** *Wenn eine Zahl durch 42 teilbar ist, dann ist sie auch durch 14 teilbar.*

Beweise, dass die Aussage stimmt. Die folgenden Schritte können bei der Lösung helfen, müssen aber nicht alle ausgeführt werden.

(a) Wie lauten die Annahme und die Behauptung?

(b) Nenne alle Zahlen zwischen -100 und 100, die durch 42 oder durch 14 teilbar sind.

(c) Welche Beobachtung triffst du in Aufgabeteil (b)?

(d) Welche der folgenden Zahlen sind durch 42 teilbar? Verifiziere deine Antwort, indem du eine ganze Zahl $k$ findest, sodass $a = 42 \cdot k$.

$$33 \quad 84 \quad 462 \quad 540 \quad -728$$

(e) Welche der folgenden Zahlen sind durch 14 teilbar? Verifiziere deine Antwort, indem du eine ganze Zahl $k$ findest, sodass $a = 14 \cdot k$.

$$33 \quad 84 \quad 462 \quad 540 \quad -728$$

(f) Sei $a$ eine Zahl, die durch 42 teilbar ist. Welche Form hat die Zahl nach der Definition der Teilbarkeit? (Skript S.23)

(g) Sei $a$ eine Zahl, die durch 14 teilbar ist. Welche Form hat die Zahl nach der Definition der Teilbarkeit? (Skript S.23)

(h) Gib atomare Aussagen an, sodass die Implikationsfolge $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$ erfüllt ist.

(i) Gib für jeden Zwischenschritt in deiner obigen Implikationsfolge eine Begründung an.

(j) Beweise den obigen Satz, d.h. zeige, dass jede Zahl, die durch 42 teilbar ist auch durch 14 teilbar ist.

**Solution:** Der Beweis des Satzes ist die eigentliche Aufgabe. Die einzelnen Teile sollen lediglich jenen weiterhelfen, die beim Beweis nicht weiterkommen. Wer auch ohne die klarkommt, braucht die natürlich nicht zu machen.

(a) A Eine Zahl ist durch 42 teilbar
B Eine Zahl ist durch 14 teilbar

(b) durch 42: -84, -42, 0, 42, 84
durch 14: -98, -84, -70, -56, -42, - 28, -14, 0, 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98

(c) Alle Zahlen zwischen $-100$ und 100, die durch 42 teilbar sind, sind auch durch 14 teilbar

(d) 33 Nein, denn $k = \frac{32}{42}$ ist keine ganze Zahl

84 Ja, für eine ganze Zahl $k = \frac{84}{42} = 2$

462 Ja, für eine ganze Zahl $k = \frac{462}{42} = \frac{231}{21} = 11$

540 Nein, denn $k = \frac{540}{42} = \frac{270}{21}$ ist keine ganze Zahl

-728 Nein, denn $k = -\frac{728}{42} = -\frac{364}{21}$ ist keine ganze Zahl

(e) 33 Nein, denn $k = \frac{32}{14}$ ist keine ganze Zahl

84 Ja, für eine ganze Zahl $k = \frac{84}{14} = \frac{42}{7} = 6$

462 Ja, für eine ganze Zahl $k = \frac{462}{14} = \frac{231}{7} = 33$

540 Nein, denn $k = \frac{540}{14} = \frac{270}{7}$ ist keine ganze Zahl

-728 Ja, für eine ganze Zahl $k = -\frac{728}{14} = -\frac{364}{7}$

(f) $a = 42 \cdot k$ für eine ganze Zahl $k$

(g) $a = 14 \cdot k$ für eine ganze Zahl $k$

(h) $A$ Eine Zahl ist durch 42 teilbar

$A_1$ $a = 42 \cdot k$ für eine ganze Zahl $k$

$A_2$ $a = 14 \cdot 3 \cdot k$ für eine ganze Zahl $k$

$A_3$ $a = 14 \cdot l$ für eine ganze Zahl $l = 3 \cdot k$

$B$ Eine Zahl ist durch 14 teilbar

Implikationsfolge: $A \Rightarrow^{(1)} A_1 \Rightarrow^{(2)} A_2 \Rightarrow^{(3)} A_3 \Rightarrow^{(4)} B$

(i) (1) Definition der Teilbarkeit

(2) $42 = 3 \cdot 14$

(3) $l = 3 \cdot k$, $3, k \in \mathbb{Z}, \mathbb{Z}$ ist abgeschlossen unter Multiplikation (Skirpt S. 13).

(4) Definition der Teilbarkeit

(j) Sei $a$ eine Zahl die durch 42 teilbar ist. Nach der Definition der Teilbarkeit hat sie die Form $a = 42 \cdot k = 14 \cdot 3 \cdot k$ für eine ganze Zahl $k$. Definiere eine ganze Zahl $l = 3 \cdot k$. Dann gilt $a = 14 \cdot l$ für eine ganze Zahl $l$, aufgrund der Abgeschlossenheit der ganzen Zahlen bezüglich der Multiplikation. Nach der Definition der Teilbarkeit ist $a$ somit durch 14 teilbar.

$\square$

## Aufgabe 2: Kontraposition

Sei $a \in \mathbb{Z}$.

Beweise: *Wenn $a^{32}$ eine ungerade Zahl ist, dann ist $a^4$ ebenfalls eine ungerade Zahl.*

Folgende Überlegungen können hilfreich sein.

(a) Wie lautet die Voraussetzung $A$ und die Folgerung $B$?

(b) Wie lauten die Negation von $A$ und $B$?

(c) Welche Form hat eine Zahl, die gerade ist?

(d) Finde Zwischenaussagen, sodass die Implikationsreihenfolge $\neg B \Rightarrow A_1 \cdots A_n \Rightarrow \neg A$ gilt.

(e) Begründe die Schritte, die jeweils zur nächsten Zwischenaussage führen.

**Solution:**

(a) $A$ $a^{32}$ ist eine ungerade Zahl

$B$ $a^4$ ist eine ungerade Zahl

(b) $\neg A$ $a^{32}$ ist eine gerade Zahl

$\neg B$ $a^4$ ist eine gerade Zahl

(c) $a = 2 \cdot k$ für eine ganze Zahl $k$

(d) $\neg B$ $a^4$ ist eine gerade Zahl

$A_1$ $a^4$ ist durch 2 teilbar

$A_2$ $a^4 = 2 \cdot k$ für eine ganze Zahl $k$

$A_3$ $(a^4)^8 = 2^8 \cdot k^8$ für eine ganze Zahl $k$

$A_4$ $a^{32} = 2 \cdot 2^7 \cdot k^8$ für eine ganze Zahl $k$

$A_5$ $a^{32} = 2 \cdot l$ für eine ganze Zahl $l$

$A_6$ $a^{32}$ ist durch 2 teilbar

$\neg B$ $a^{32}$ ist eine gerade Zahl

Implikationsfolge: $\neg B \Rightarrow^{(1)} A_1 \Rightarrow^{(2)} A_2 \Rightarrow^{(3)} A_3 \Rightarrow^{(4)} A_4 \Rightarrow^{(5)} A_5 \Rightarrow^{(6)} A_6 \Rightarrow^{(7)} \neg B$

(e)
1. Definition einer geraden Zahl
2. Definition der Teilbarkeit
3. Potenzieren mit 8
4. $(a^4)^8 = a^{32}$ und $2^8 = 2 \cdot 2^7$
5. $l = 2^7 \cdot k^8 \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ ist abgeschlossen unter Multiplikation (Skript S. 13)
6. Definition der Teilbarkeit
7. Definition für eine gerade Zahl

(f) Beweis durch Kontraposition

Sei $a^4$ eine gerade Zahl. Gemäß Definition einer geraden Zahl ist sie durch zwei teilbar. Nach der Definition der Teilbarkeit hat sie die Form $a^4 = 2 \cdot k$ für eine ganze Zahl $k$. Durch potenzieren mit 8 erhalten wir $(a^4)^8 = a^{32} = 2^8 \cdot k^8 = 2 \cdot 2^7 \cdot k^8$ für eine ganze Zahl $k$. Wir definieren eine ganze Zahl $l := 2^7 \cdot k^8$. Somit erhalten wir $a^{32} = 2 \cdot l$ für eine ganze Zahl $l$. Somit ist $a^{32}$ gemäß Definition der Teilbarkeit durch 2 teilbar und nach der Definition einer geraden Zahl ist sie gerade.

$\square$

## Aufgabe 3: Beweis durch Widerspruch

Beweise: *$a + b$ ist durch 7 teilbar, wenn $a$ und $b$ durch 7 teilbar sind* durch Widerspruch.

Folgende Überlegungen können hilfreich sein.

(a) Wie lautet die Voraussetzung $A$ und die Folgerung $B$?

(b) Wie lautet die Negation von $B$?

(c) Welche Form hat eine Zahl, die durch 7 teilbar ist?

(d) Finde Zwischenaussagen, sodass die Implikationsreihenfolge ($A$ und $\neg B$) $\Rightarrow A_1 \cdots A_n \Rightarrow F$ gilt, wobei $F$ eine falsche Aussage darstellt.

(e) Begründe die Schritte, die jeweils zur nächsten Zwischenaussage führen.

**Solution:** Kann man natürlich auch direkt beweisen, soll hier aber durch Widerspruch bewiesen werden.

(a) $A$ $a$ und $b$ sind durch 7 teilbar

$B$ $a + b$ ist durch 7 teilbar

(b) $\neg B$ $a + b$ ist nicht durch 7 teilbar

(c) $a = 7 \cdot k$ für eine ganze Zahl $k$

(d)

$A \wedge \neg B$ $a$ und $b$ ist durch 7 teilbar und $a+b$ ist nicht durch 7 teilbar

$A_1$ $a = 7 \cdot l$ und $b = 7 \cdot k$ für ganze Zahlen $k, l$ und $a+b$ ist nicht durch 7 teilbar

$A_2$ $a = 7 \cdot l$ und $a+b = a + 7 \cdot k$ für ganze Zahlen $k, l$ und $a+b$ ist nicht durch 7 teilbar

$A_3$ $a+b = 7 \cdot l + 7 \cdot k$ für ganze Zahlen $k, l$ und $a+b$ ist nicht durch 7 teilbar

$A_4$ $a+b = 7 \cdot (l \cdot k)$ für ganze Zahlen $k, l$ und $a+b$ ist nicht durch 7 teilbar

$A_5$ $a+b = 7 \cdot m$ für ganze Zahlen $l, m$ und $a+b$ ist nicht durch 7 teilbar

$F$ $a+b$ ist durch 7 teilbar und $a+b$ ist nicht durch 7 teilbar

Implikationsfolge: $A \wedge \neg B \Rightarrow^{(1)} A_1 \Rightarrow^{(2)} A_2 \Rightarrow^{(3)} A_3 \Rightarrow^{(4)} A_4 \Rightarrow^{(5)} A_5 \Rightarrow^{(6)} F$

(e)
1. Definition der Teilbarkeit für $a$ und $b$
2. Addition von $a$
3. Einsetzen $a = 7 \cdot l$
4. $7 \cdot l + 7 \cdot k = 7 \cdot (l + k)$
5. $m = l \cdot k$
6. Definition der Teilbarkeit

(f) Beweis durch Widerspruch
Angenommen $a$ und $b$ sind durch 7 teilbar und die Summe $a+b$ ist nicht durch 7 teilbar ist. Gemäß der Definiton der Teibarkeit gilt, dass $b = 7 \cdot k$ für eine ganze Zahl $k$. Darüber hinaus ist $a = 7 \cdot l$ für eine ganze Zahl $l$. Durch Addition von $a$ erhalten wir $a+b = a+7 \cdot k$, also $a+b = 7 \cdot l + 7 \cdot k = 7 \cdot (k+l)$. Klar: $a+b$ ist auch durch 7 teilbar und dies ist ein Widerspruch zu Annahme.

□

## Aufgabe 4: Äquivalenzen

Seien $x, y \in \mathbb{N}$. Beweise bzw. widerlege, welche der folgenden drei Äquivalenzen gelten.

(a) $x \cdot y$ ungerade $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ $x$ und $y$ ungerade

(b) $x \cdot y$ gerade $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ $x$ und $y$ gerade

(c) $x \cdot y$ gerade $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ $x$ oder $y$ gerade

**Solution:**

Um die Äquivalenz von Aussagen $A$ und $B$ zu beweisen, muss sowohl gezeigt werden, dass $B$ aus $A$ folgt ($A \Rightarrow B$), als auch, dass $A$ aus $B$ folgt ($B \Rightarrow A$).

a) $x \cdot y$ ungerade $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ $x$ und $y$ ungerade

z.Zg: $x \cdot y$ ungerade $\overset{!}{\Rightarrow}$ $x$ und $y$ ungerade
Beweis durch Kontraposition (da aus der Eigenschaft eines Produktes Eigenschaften für die einzelnen Faktoren zu folgern echt schwierig ist...). Wir versuchen also stattdessen zu zeigen, dass $x$ *oder* $y$ *gerade* $\Rightarrow x \cdot y$ *gerade* gilt.
Fall 1: Seien $x, y \in \mathbb{N}$ sei $x$ gerade und $y$ ungerade. Dann gibt es Zahlen $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $x = 2 \cdot k$ und $y = 2 \cdot l + 1$. Damit ist $x \cdot y = 2 \cdot k \cdot (2 \cdot l + 1) = 2 \cdot k \cdot 2 \cdot l + 2 \cdot k) = 2 \cdot (2 \cdot k \cdot l + k)$. Sei $m = 2 \cdot k \cdot l + k$. Da $k, l \in \mathbb{Z}$ ist auch $m \in \mathbb{Z}$. Somit $x \cdot y$ durch 2 teilbar und somit gerade.
Fall 2: Seien $x, y \in \mathbb{N}$ sei $x$ ungerade und $y$ gerade. Funktioniert genau so wie Fall 1.

Fall 3: Seien $x, y \in \mathbb{N}$ gerade. Dann gibt es Zahlen $k, l \in \mathbb{Z}$, mit $x = 2 \cdot k$ und $y = 2 \cdot l$. Das bedeutet aber, dass $x \cdot y = 2 \cdot k \cdot 2 \cdot l = 2 \cdot (k \cdot l)$. Sei $m = k \cdot l$. Wegen der Abgeschlossenheit von ($\mathbb{Z}$ unter Multiplikation (S. 13), gilt $m \in \mathbb{Z}$ und $x \cdot y = 2 \cdot m$. Somit ist $x \cdot y$ durch 2 teilbar und somit gerade.

z.Zg: $x$ und $y$ ungerade $\overset{!}{\Rightarrow}$ $x \cdot y$ ungerade
Beweis: Das beweisen wir direkt. Seien $x, y \in \mathbb{N}$ ungerade. Dann gibt es Zahlen $k, l \in \mathbb{Z}$, mit $x = 2 \cdot k + 1$ und $y = 2 \cdot l + 1$. Das bedeutet, dass $x \cdot y = (2 \cdot k + 1) \cdot (2 \cdot l + 1) = 2 \cdot 2 \cdot k \cdot l + 2 \cdot k + 2 \cdot l + 1 = 2 \cdot (2 \cdot k \cdot l + k + l) + 1$. Sei $m = 2 \cdot k \cdot l + k + l$. Wegen der Abgeschlossenheit von ($\mathbb{Z}$ bezüglich Multiplikation und Addition, gilt $m \in \mathbb{Z}$ und $x \cdot y = 2 \cdot m + 1$ ist ungerade.

$\square$

Somit sind die beiden Aussagen äquivalent.

b) $x \cdot y$ gerade $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ $x$ und $y$ gerade

z.Zg.: $x \cdot y$ gerade $\overset{!}{\Rightarrow}$ $x$ und $y$ gerade
Diese Aussage stimmt nicht. Man kann sie mit einem Gegenbeispiel widerlegen. Betrachten wir $x \cdot y = 12$. Für $x = 4$ und $y = 3$ stimmt die Aussage nicht.

Somit können die Aussagen nicht äquivalent sein.

c) $x \cdot y$ gerade $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ $x$ oder $y$ gerade

z.Zg: $x \cdot y$ gerade $\overset{!}{\Rightarrow}$ $x$ oder $y$ gerade
Beweis durch Kontraposition. Wir zeigen also *$x$ und $y$ ungerade $\Rightarrow$ $x \cdot y$ ungerade.*
Begeistert stellen wir fest, dass wir das ja bereits im zweiten Teil von a) gezeigt haben.

z.Zg: $x$ oder $y$ gerade $\overset{!}{\Rightarrow}$ $x \cdot y$ gerade.
Für einen direkten Beweis müsste man wohl eine Fallunterscheidung machen, um alle Möglichkeiten für $x$ oder $y$ gerade abzudecken. Also schauen wir uns erstmal die Möglichkeit eines Beweis durch Kontraposition an. Dann wäre zu zeigen, dass $x \cdot y$ ungerade $\overset{!}{\Rightarrow}$ $x$ und $y$ ungerade. Erfreut stellen wir fest, dass wir das bereits im ersten Teil von a) gezeigt haben und sind fertig.

$\square$

Somit sind die Aussagen äquivalent.

Viel Erfolg!