Tag 2b - Logik und Beweise

Aufgabe 1: Direkter Beweis durch Umformen

Zeige durch Umformen, dass für $x, n \in \mathbb{N}, x \neq 1$ gilt:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Solution:

$$1 + x + x^2 + \cdots x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \Leftrightarrow (1 + x + x^2 + \cdots x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}$$

Also:

$$\begin{aligned}(1 + x + x^2 + \cdots x^n)(1 - x) &= (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) - (x + x^2 + \cdots x^n + x^{n+1}) \\ &= 1 + x - x + x^2 - x^2 + \cdots x^n - x^n - x^{n+1} \\ &= 1 - x^{n+1}\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

$\square$

Aufgabe 2: Beweise oder widerlege

Betrachte die folgenden Aussagen und entscheide, ob sie wahr oder falsch sind.
Wenn sie wahr sind, dann beweise.
Wenn sie falsch sind, dann widerlege die Aussage, d.h. gib ein Beispiel an, das zeigt, dass die Aussage nicht stimmen kann.

(a) Sei a eine natürliche Zahl. Wenn a^3 gerade ist, dann ist a^4 gerade.

(b) Wenn n oder m durch 3 teilbar sind, dann ist auch die Summe $n + m$ durch 3 teilbar.

(c) Wenn a und b ungerade Zahlen sind, dann ist auch die Summe $a + b$ ungerade.

(d) Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist und eine weitere Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist deren Summe durch 7 teilbar.

(e) Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist und eine weitere Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist deren Produkt durch 7 teilbar.

(f) Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, dann ist deren Quadrat ebenfalls durch 3 teilbar.

Solution:

(a) Diese Aussage stimmt
Beweis durch Widerspruch

Sei angenommen, dass a^3 gerade ist und dass a^4 ungerade ist. Klar: $a^3 = 2 \cdot k$ für eine ganze Zahl k. Multipliziert mit a erhalten wir: $a \cdot a^3 = a^4 = 2 \cdot a \cdot k$ für eine ganze Zahl k. Definiere eine neue ganze Zahl $l = a \cdot k$. Dann gilt: $a^4 = 2 \cdot l$ und a^4 ist somit gerade.
Widerspruch

$\square$

(b) Das ist offensichtlich falsch, denn $3 + 4 = 7$ ist nicht durch 3 teilbar

(c) Das ist offensichtlich falsch, denn $3 + 7 = 10$ ist gerade

(d) Nein, denn 3 ist durch 3 teilbar und 8 ist durch 4 teilbar. $3 + 8 = 11$ ist nicht durch 7 teilbar.

(e) Nein, denn $3 \cdot 4 = 12$ ist nicht durch 7 teilbar.

(f) wahr: Sei a eine Zahl, die durch 3 teilbar ist. Dann hat sie die Form $a = 3 \cdot k$ für eine ganze Zahl k. Durch Quadrieren erhalten wir $a^2 = 3^2 \cdot k^2$. Definiere die ganze Zahl $l = 3 \cdot k^2$. Dann gilt $a^2 = 3 \cdot l$ für eine ganze Zahl l und nach der Definition der Teilbarkeit ist a^2 durch 3 teilbar.

$\square$

Aufgabe 3: Die Summe ungerader Zahlen

Kann die Summe von 111 ungeraden Zahlen gerade sein? Untermauer deine Anwort mit einem Beweis.

Solution: Nein, kann sie nicht.

Mehrere Überlegungen führen zu dieser Lösung.

1. (a)*Die Summe zweier ungerader Zahlen ist immer gerade*, (b)*Die Summe zweier gerader Zahlen ist immer gerade* und (c)*Die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ist immer ungerade*. Diese Aussagen lassen sich direkt beweisen. Nun ist also die Summe einer geraden Anzahl (z.B. 110) ungerader Zahlen gerade, denn je zwei Summanden lassen sich zu einer geraden Zahl zusammenfassen. Am Schluss bleibt also eine gerade und eine ungerade Zahl übrig, und nach (c) ist die Summe einer ungeraden Anzahl ungerader Zahlen demnach immer ungerade.

2. Es ist auch möglich einen direkten Beweis für 111 ungerade Zahlen zu führen.
Die Summe von 111 ungeraden Zahlen lässt sich schreiben als $\sum_{i=1}^{111} 2 \cdot k_i + 1$ mit $k_i \in \mathbb{Z}$.
Nun gilt aber:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{111} 2 \cdot k_i + 1 &= 111 + \sum_{i=1}^{111} 2 \cdot k_i \\ &= 111 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{111} k_i\end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^{111} k_i \in \mathbb{Z}$, wegen der Abgeschlossenheit von ($\mathbb{Z}$ bzgl. der Addition. Somit ist $2 \cdot \sum_{i=1}^{111} k_i$ gerade. Sei $q = 55 + \sum_{i=1}^{111} k_i$, da $111 = 2 \cdot 55 + 1$ gilt $111 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{111} k_i = 1 + 2 \cdot q$ und somit ungerade. $\square$

Aufgabe 4: Die Magische Zahl $z = p^2 - 1$

Beweise: Sei $p \geq 5$ eine Primzahl.

(a) Dann ist die Zahl $z = p^2 - 1$ durch 3 teilbar.

(b) Dann ist die Zahl $z = p^2 - 1$ durch 2 teilbar.

(c) Dann ist die Zahl $z = p^2 - 1$ durch 4 teilbar.

(d) Dann ist die Zahl $z = p^2 - 1$ durch 24 teilbar.

Hinweis: $p^2 - 1 = (p-1) \cdot (p+1)$

Solution:

(a) Zunächst stellen wir fest, dass $(p-1), p$ und $(p+1)$ drei aufeinander folgende natürliche Zahlen sind. Da von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets eine durch 3 teilbar sein muss, und da p eine Primzahl ≥ 5 ist und somit nicht durch 3 teilbar sein kann, muss entweder $(p-1)$ oder $(p+1)$ durch drei teilbar sein.
O.b.d.A. sei $(p-1)$ durch 3 teilbar, dann gilt $(p-1) = 3 \cdot k$. Sei $m = k \cdot (p+1)$, dann gilt $z = p^2 - 1 = (p-1)(p+1) = 3 \cdot m$

$\square$

(b) Weiterhin ist p eine Primzahl, die größer als 5 ist, und somit mit Sicherheit eine ungerade Zahl. (Ansonsten wäre sie durch zwei teilbar und somit keine Primzahl.) Somit müssen $(p-1)$ und $(p+1)$ gerade und durch zwei teilbar sein.

$\square$

(c) Da eine von zwei aufeinander folgenden geraden Zahl durch 4 teilbar ist, muss entweder $(p-1)$ oder $(p+1)$ durch vier teilbar sein.

$\square$

(d) Insgesamt ist also von beiden Teilern $(p-1)$ und $(p+1)$ von z einer durch 3, einer durch 2 und der andere durch 4 teilbar. Damit ist z als Produkt von $(p-1)$ und $(p+1)$ wie behauptet durch $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$ teilbar.

$\square$

Aufgabe 5: Bonbons

Der Lehrer hat für die 28 Kinder in seiner Klasse 28 Bonbons mitgebracht. Jedoch ist ein Kind heute krank. Beweise, dass wenn der Lehrer selbst kein Bonbon nimmt und alle Bonbons verteilt, mindestens ein Kind mehr als ein Bonbon bekommt.

Solution:

Ok, das scheint alles sehr offensichtlich, aber wie soll man das beweisen? Konzentrieren wir uns auf die Aussage(n).
Die Aussage: *Wenn der Lehrer alle Bonbons an alle anwesenden Kinder verteilt, dann bekommt mindestens ein Kind mehr als ein Bonbon*
lässt sich zerlegen in die Aussagen:

A : 28 Bonbons werden auf 27 Kinder verteilt.

B : Es gibt (mindestens) ein Kind, das mehr als ein Bonbon erhält.

Zu zeigen wäre dann, dass $A \to B$ gilt.
Wir denken kurz über einen direkten Beweis nach. Dazu müssten wir zeigen, dass B aus A folgt. Evtl. könnte uns das gelingen, aber wir müssten unsere Argumente so konstruieren, dass sie **für alle möglichen** Verteilungen von 28 Bonbons auf 27 Kinder gelten. D.h. es reicht nicht, eine Verteilung anzugeben und dann zu sagen, dass ein Bonbon übrig ist, also nur noch an ein Kind verteilt werden kann, das bereits ein Bonbon hat.

Bei einem Beweis durch Kontraposition müssten wir beide Aussagen negieren. Während das für Aussage B schnell gemacht ist, bereitet Aussage A schon mehr Schwierigkeiten. Versuchen wir also einen Beweis durch Widerspruch. Statt $A \to B$ wollen wir also zeigen, dass $A \wedge \neg B$ eine falsche Aussage (Widerspruch zur Annahme $A \wedge \neg B$) folgt.

Wir nehmen also $A \wedge \neg B$ an.
Annahme: *Es werden 28 Bonbons an 27 Kinder verteilt und jedes Kind bekommt höchstens ein Bonbon.* Was können wir nun daraus folgern? *Wenn jedes der 27 Kinder höchstens ein Bonbon bekommt, dann werden $a = 27 \cdot x$ Bonbons verteilt. Da laut Annahme $x \leq 1$ ist folgt, dass insgesamt $a \leq 27$ Bonbons verteilt werden. Das steht aber im Widerspruch zu der Annahme, dass 28 Bonbons verteilt werden. Somit gilt die ursprüngliche Aussage, dass beim Verteilen von 28 Bonbons auf 27 Kinder mindestens ein Kind mehr als ein Bonbon erhält.* □

Rückblick

Anstatt die Aussage direkt zu beweisen, haben wir gezeigt, dass das Ereignis *Alle (28) Bonbons werden an alle (27) Kinder verteilt und alle Kinder bekommen höchstens ein Bonbon* nicht eintreten kann. Der zwangsläufige Schluss daraus ist, dass also, wenn alle (28) Bonbons an alle (27) Kinder verteilt werden, mindestens ein Kind mehr als ein Bonbon erhalten muss.

Aufgabe 6: Die Summe dreier Zahlen

Beweise den folgenden Satz.

Die Summe von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist durch 3 teilbar.

Solution: An dieser Aufgabe ist schwierig, dass man den Satz ersteinmal formalisieren muss. Annahme und Behauptung sind nicht so einfach zu entdecken, "drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen" muss erstmal mathematisch allgemein dargestellt werden.

Die Lösungsschritte sehen also in etwa so aus:

1. Als Implikation formalisiert, sieht der Satz so aus:
   Wenn $n \in \mathbb{N}$, dann ist $n + (n+1) + (n+2)$ durch 3 teilbar.

2. Also ist zu zeigen: $n \in \mathbb{N} \to n + (n+1) + (n+2)$ ist durch 3 teilbar.

3. Das kann man direkt zeigen. Drauf kommen tut man, wenn man mal untersucht, ob das stimmt.

   $$\begin{aligned} n + (n+1) + (n+2) &= n + n + n + 1 + 2 \\ &= 3 \cdot n + 3 \\ &= 3 \cdot (n+1) \end{aligned}$$

   Da $n \in \mathbb{N}$ ist auch $(n+1) \in \mathbb{N}$ (Abgeschlossenheit von $(\mathbb{N}, +)$ und somit auch $\in \mathbb{Z}$, da $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Nach Definition der Teilbarkeit ist somit $n + (n+1) + (n+2)$ durch 3 teilbar.

4. Aufschreiben muss man es so, dass am Anfang $n \in \mathbb{N}$ steht, und am Schluss $n + (n+1) + (n+2)$ ist durch 3 teilbar steht.
   Sei $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathbb{N}$ unter Addition, ist $(n+1)$ ebenfalls eine natürliche Zahl. Nach Definition der Teilbarkeit ist dann $3 \cdot (n+1)$ durch 3 teilbar. Da $3 \cdot (n+1) = 3 \cdot n + 3 = n + (n+1) + (n+2)$, ist auch $n + (n+1) + (n+2)$ durch 3 teilbar.
   □

Ich finde den direkten Beweis am einfachsten, es geht aber auch als Widerspruchsbeweis.

Viel Erfolg!