Tag 3a - Induktion und Rekursion

Aufgabe 1: Quiz Summen und Produkte 1.

1. Welche(r) Term(e) ergeben 14?
   a) $\sum_{i=2}^{5} i$
   b) $\sum_{i=1}^{3} (2^i - 1)$
   c) $\sum_{i=0}^{3} (5 - i)$
2. Welche(r) Term(e) ergeben 7?
   a) $\sum_{i=1}^{7} i$
   b) $\sum_{i=3}^{4} (2i - i)$
   c) $\sum_{i=1}^{7} 1$
3. Welche(r) Term(e) ergeben 15?
   a) $\prod_{i=0}^{1} \prod_{j=0}^{2} (2j + i)$
   b) $\prod_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{2} (2j + i)$
   c) $\sum_{i=0}^{1} \prod_{j=0}^{2} (2j + i)$

Solution:

1. a und c ergeben beide 14
2. b und c ergeben beide 7
3. a ergibt 0, b ergibt 54 und c ergibt 15.

Aufgabe 2: Quiz Rekursion

Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ terminieren immer?
Hinweis: $\mathbb{N}_0$ bezeichnet die natürlichen Zahlen inklusive der 0.

(a)

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 1, & \text{falls } n = 1 \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst} \end{cases}$$

(b)

$$f(n) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ f(n-1) + f(n-2), & \text{sonst} \end{cases}$$

(c)

$$f(n) := \begin{cases} 5, & \text{falls } n = 1 \\ 3 + f(n/2), & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 5 - f(n+1), & \text{sonst} \end{cases}$$

Solution:

(a) ja, terminiert für alle $n \in \mathbb{N}$

(b) nein terminiert nicht, da $f(n-2)$ für ungerade n den Basisfall nicht trifft. Außerdem ist $f(n-2)$ für $n=1$ nicht mehr definiert, da das dann $f(-1)$ wäre und die Funktion nur für $f : \mathbb{N}_{\nvdash} \to \mathbb{N}_{\nvdash}$ definiert ist.

(c) terminiert für alle außer $n=0$. Wäre zu retten, wenn man einen Basisfall für $n=0$ angibt.

Aufgabe 3: Rekursion

Die Funktion $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sei gegeben durch die Vorschrift

$$f(n) := \begin{cases} 3, & \text{falls } n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ und $f(4)$.

Solution: Wie die Fakultätsfunktion.
$f(0) = 3$ kann man ablesen
$f(1) = 1 \cdot 3 = 3$
$f(2) = 2 \cdot 3 = 6$
$f(3) = 3 \cdot 6 = 18$
$f(4) = 4 \cdot 18 = 72$

Aufgabe 4: Ungerade Zahlen

Summiert man die ersten ungeraden Zahlen, so erhält man *anscheinend* stets eine Quadratzahl:

$$\begin{array}{rcrcl} 1 & = & 1 & = & 1^2 \\ 3+1 & = & 4 & = & 2^2 \\ 5+3+1 & = & 9 & = & 3^2 \\ 7+5+3+1 & = & 16 & = & 4^2 \\ 9+7+5+3+1 & = & 25 & = & 5^2 \end{array}$$

Dieser Umstand soll in allgemeiner Form bewiesen werden (s.u.). Hierzu ein paar Erläuterungen:
Eine *gerade* Zahl lässt sich in der Form $2 \cdot n$ schreiben mit $n \in \mathbb{N}_0$.
Eine *ungerade* Zahl lässt sich in der Form $2 \cdot n + 1$ schreiben mit $n \in \mathbb{N}_0$.
In den obigen fünf Summen gilt: Ist der letzte Summand die Zahl $2n+1$, so ist der Wert der Summe$(n+1)^2$. In der letzten Beispielzeile wird bis $9 = 2 \cdot 4 + 1$ summiert und die Summe ergibt $(4+1)^2 = 5^2$.

Achtung: Dies alles ist nur eine Erläuterung der zu beweisenden Formel. Wir haben noch keinen Beweis für die allgemeine Formel geführt!

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$$

.

Solution: Induktionsanfang: $n = 0$

$$\sum_{i=0}^{0} (2i+1) = (2 \cdot 0 + 1) = 0 + 1 = 1 = 1^2 = (0+1)^2$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein n mit $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$$

Induktionsschritt: $n \to n+1$
Zu zeigen ist:

$$\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) = ((n+1)+1)^2$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) &= \sum_{i=0}^{n}(2i+1) + (2(n+1)+1) && \text{letzten Summanden abkoppeln} \\
&= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 && \text{Induktionsvoraussetzung benutzen} \\
&= (n+1)^2 + 2 \cdot (n+1) \cdot 1 + 1^2 && \text{Umformungen binomische Formel} \\
&= ((n+1)+1)^2 && \text{binomische Formel mit } a = (n+1) \text{ und } b = 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Rekursion und Induktion

n Personen treffen sich und jede schüttelt jeder anderen einmal die Hand. Wie viele Händedrücke gibt das? Löse das Problem rekursiv.

Solution: Offensichtlich kommt am Ende $\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}$ raus, denn jedes Händeschütteln erzeugt eine zweielementige Teilmenge. Wenn jeder mit jedem eine Teilmenge bildet, dann ist die Anzahl der 2-elementigen Teilmengen gesucht.

Wichtig ist aber der Lösungsweg und außerdem soll das Problem rekursiv gelöst werden.

Also, wie viele Händedrücke $H(n)$ gibt es, wenn sich n Personen die Hände schütteln? $n = 1$ Person kann mit niemandem Hände schütteln $H(1) = 0$, $n = 2$ Personen können sich die Hand schütteln $H(2) = 1$, $n = 3$ Personen .... ich kann jedem der beiden andern die Hand schütteln, und die zwei können noch untereinander die Hände schüttlen, also $H(3) = 3$. Bei $n = 4$ Personen, ...ich kann wieder allen anderen $(n-1)$ Personen die Hand schütteln und dann können diese $(n-1)$ Personen sich noch untereinander die Hände schütteln. Also gilt für n Personen:

$$H(n) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 1 \\ (n-1) + H(n-1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

So, jetzt ist die Frage was die geschlossene Form dieser Rekursionsgleichung ist.

$$\begin{aligned}
H(1) &= 0 \\
H(2) &= 1 + 0 \\
H(3) &= 2 + 1 + 0 \\
H(4) &= 3 + 2 + 1 + 0 \\
H(5) &= 4 + 3 + 2 + 1 + 0 \\
&\vdots \\
H(i) &= (i-1) + (i-2) + \cdots + 1 + 0
\end{aligned}$$

Vermutung:

$$H(n) = \sum_{i=0}^{n-1} i$$

Jetzt hilft der kleine Gauß ($\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$), den wir in der Vorlesung auch gemacht haben. Überträgt man das auf unsere Vermutung käme demnach raus, $H(n) = \frac{(n-1)n}{2}$.

Beweis durch vollständige Induktion:

$n = 1$:
$H(1) = 0 = 0 \cdot 1 = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$

Induktionsschritt:
Annahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ gilt: $H(n) = \frac{(n-1)n}{2}$
z.Zg. Dann gilt: $H(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\begin{aligned}
H(n+1) &= n + H(n) && \text{Definition von } H(n) \\
&= n + \frac{(n-1)n}{2} && \text{Induktionsannahme} \\
&= \frac{2n}{2} + \frac{(n-1)n}{2} && \text{Erweitern auf 2} \\
&= \frac{2n + n^2 - n}{2} && \text{ausmultipliziert} \\
&= \frac{n^2 + n}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

□

Viel Erfolg!