Tag 3b - Induktion und Rekursion

Aufgabe 1: Vollständige Induktion

Beweise die folgenden Aussagen durch vollständig Induktion.

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ gilt: $2^n > n^2$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

Solution:

a) **Induktionsanfang:** $n = 5$ (mit 4 geht's tatsächlich nicht, können die Leute ja ausprobieren)

$$2^5 = 32 > 25 = 5^2$$

Induktionsschritt: $n \to n+1$
Induktionsvoraussetzung: für $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$ gilt: $2^n > n^2$
Induktionsbehauptung: $2^{n+1} > (n+1)^2$

$$\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n && \text{Induktionsvoraussetzung} \\
&> 2 \cdot n^2 \\
&= n^2 + n^2 \\
&> n^2 + 3n && \text{da } n \geq 5 \\
&> n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2
\end{aligned}$$

$\square$

b) **Induktionsanfang:** $n = 0$

$$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1 = 2 - 1 = 2^{0+1} - 1$$

Induktionsschritt: $n \to n+1$
Induktionsvoraussetzung: für ein $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ gilt: $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$
Induktionsbehauptung: $\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{(n+1)+1} - 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} 2^i &= (\sum_{i=0}^{n} 2^i) + 2^{n+1} && \text{Induktionsvoraussetzung} \\
&= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \\
&= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\
&= 2^{(n+1)+1} - 1
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 2: Vollständige Induktion als Beweistechnik

Beweise durch vollständige Induktion:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $n! \leq n^n$.

Solution:

Eigentlich sollten die Leute $n!$ kennen. Ansonsten steht die Definition auch im Skript S. 33.

Induktionsanfang: $n = 0$: durch Ausrechnen.
$n! = 0! = 1 \leq 0^0 = n^n$

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ ist $n! \leq n^n$.
Induktionsschritt: $n \to n + 1$
zu zeigen ist: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(n + 1)! \leq (n + 1)^{(n+1)}$.

$$\begin{aligned}(n+1)! &= (n+1) \cdot n! \\ &\leq (n+1) \cdot n^n \\ &\leq (n+1) \cdot (n+1)^n \\ &= (n+1)^{n+1}\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Papierstreifen

Wie viele Faltkanten entstehen, wenn man einen Papierstreifen n-mal immer wieder in der Mitte faltet? Beweise, dass deine Lösung korrekt ist.

Solution:

Um uns einen Überblick zu verschaffen, können wir einfach einen Papierstreifen nehmen, diesen falten und die Faltkanten zählen. Das führt uns zu folgender Tabelle:

n	0	1	2	3	4
Faltkanten	0	1	3	7	15

Das legt die Vermutung nahe, dass die Anzahl der Faltkanten nach n Faltungen $2^n - 1$ ist.

Das ist allerding nur eine *Vermutung* wir können uns nicht sicher sein. Um sicher zu gehen, müssen wir verstehen, welche Regel(n) hinter dem Entstehen der Faltkanten steckt. Also überlegen wir uns: Wie setzt sich die Anzahl der Faltkanten $F(n)$ zu einer gegebenen Faltung n zusammen? Da offensichtlich keine Faltkanten verschwinden können ist die Anzahl der Faltkanten zu einer gegeben Faltung n, die Faltkanten, die vor der Faltung bereits vorhanden waren $F(n - 1)$ plus die Faltkanten, die neu hinzukommen $N(n)$. Also lässt sich die Anzahl der Faltkanten $F(n)$ ausdrücken als:

$$F(n) := F(n - 1) + N$$

Wie viele Faltkanten kommen also nun bei einer Faltung des Papierstreifens in der Mitte hinzu? Offensichtlich kommen genau so viele neue Faltkanten hinzu, wie Papierlagen übereinander liegen. Wir versuchen also die Frage zu beantworten, wie viele Papierlagen $L(n)$ nach der n-ten Faltung übereinander liegen.

n	0	1	2	3	4
$L(n)$	1	2	4	8	16

Wir stellen die Vermutung auf, dass $L(n) = 2^n$ ist. Warum könnte das stimmen? Ein Falten in der Mitte führt dazu, dass sich die Anzahl der übereinanderliegenden Papierstücke verdoppelt. Also gilt:

$$L(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 2 \cdot L(n-1), & \text{sonst} \end{cases}$$

Nun müssen wir beweisen, dass $L(n) = 2^n$ ist.

Beweis durch vollständige Induktion.

- IV: Sei $n = 0$. Laut Definition ist $L(0) = 1 = 2^0 = 2^n$.
- IS: Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ gilt: $L(n) = 2^n$. Zu Zeigen ist, dass dann $L(n+1) \stackrel{!}{=} 2^{n+1}$.

$$\begin{aligned} L(n+1) &= 2 \cdot L(n) && \text{laut Definition} \\ &= 2 \cdot 2^n && \text{laut Induktionsannahme} \\ &= 2^{n+1} \end{aligned}$$

□

Mit diesem Wissen, können wir nun die Anzahl der neu hinzukommenden Faltkanten N bei Faltung n als Anzahl der Papierstücke, die *vor* Faltung n übereinander liegen angeben. Somit ist $N(n) = L(n-1) = 2^{n-1}$. Damit ergibt für die Anzahl der Faltkanten $F(N)$:

$$F(n) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ F(n-1) + 2^{n-1}, & \text{sonst} \end{cases}$$

und es bleibt zu zeigen, dass $F(n) \stackrel{!}{=} 2^n - 1$ ist.

Beweis durch vollständige Induktion.

- IV: Sei $n = 0$. Laud Definition ist $F(0) = 0 = 1 - 1 = 2^0 - 1 = 2^n - 1$.
- IS: Angenommen für ein $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ gilt: $F(n) = 2^n - 1$. Zu Zeigen ist, dass dann $F(n+1) \stackrel{!}{=} 2^{n+1} - 1$ gilt.

$$\begin{aligned} F(n+1) &= F(n) + 2^{n-1} && \text{laut Definition} \\ &= 2^n - 1 + 2^n && \text{laut Induktionsannahme} \\ &= 2 \cdot 2^n - 1 \\ &= 2^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

□

$N(n) = 2 \cdot N(n-1)$ und $N(0) = 1$

Aufgabe 4: Induktive Argumentation

Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweise durch induktive Argumentation folgende Aussage:
n Elemente lassen sich auf $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ Arten anordnen.

Solution: **Induktionsanfang:** $n = 1$
1 Element lässt sich auf eine Art anordnen: $1 = 1!$.
Induktionsschritt: $n \to n + 1$
Induktionsvoraussetzung: n Elemente lassen sich auf $n!$ Arten anordnen.
Induktionsbehauptung: $n + 1$ Elemente lassen sich auf $(n + 1)!$ Arten anordnen.
Gegeben seien die Elemente $e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}$. Für die $n + 1$ Elemente stehen $n + 1$ Positionen zur Verfügung. Das Element e_{n+1} kann auf jeder dieser Positionen stehen. Nehmen wir also an, es stehe auf einer beliebigen Position x. Dann gibt es für die restlichen n Elemente laut Induktionsvoraussetzung noch $n!$ Möglichkeiten auf die restlichen n Positionen verteilt zu sein. Insgesamt gibt es also für alle $n+1$ Elemente $(n+1)\cdot n! = (n+1)!$ verschiedene Arten angeordnet zu sein. □

Aufgabe 5: Rekursiv definierte Funktionen

Schauen Sie sich im Skript S. 76 die Haskell-Funktion `erste_rekursive_Funktion` an.

a) formuliere für diese Funktion eine rekursive Funktionsgleichung $f(n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ wie z.B. die Fakultätsfunktion im Skript S. 33.

b) Beweise, dass die aufgestellte Funktion $f(n)$ tatsächlich $\sum_{i=0}^{n} i$ berechnet. (S. 24 im Skript könnte helfen.)

Solution:

a)

$$f(n) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ n + f(n-1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) **Induktionsanfang:** $n = 0$

$$f(0) = 0 = \sum_{i=0}^{0} i$$

Induktionsschritt: $n \to n + 1$
Induktionsbehauptung: $f(n + 1) = \sum_{i=0}^{n+1} i$

$$\begin{aligned} f(n+1) &= (n+1) + f(n) && \text{Definition} \\ &= (n+1) + \sum_{i=0}^{n} i && \text{Induktionsvoraussetzung} \\ &= (n+1) + n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} i \end{aligned}$$

□

Viel Erfolg!