Tag 2a - Beweistechniken

Aufgabe 1: Direkter Beweis

Betrachte den folgenden Satz

Satz 1 *Wenn eine Zahl durch 42 teilbar ist, dann ist sie auch durch 14 teilbar.*

Beweise, dass die Aussage stimmt. Die folgenden Schritte können bei der Lösung helfen, müssen aber nicht alle ausgeführt werden.

(a) Wie lauten die Annahme und die Behauptung?

(b) Nenne alle Zahlen zwischen -100 und 100, die durch 42 oder durch 14 teilbar sind.

(c) Welche Beobachtung triffst du in Aufgabeteil (b)?

(d) Welche der folgenden Zahlen sind durch 42 teilbar? Verifiziere deine Antwort, indem du eine ganze Zahl k findest, sodass $a = 42 \cdot k$.

$$33 \quad 84 \quad 462 \quad 540 \quad -728$$

(e) Welche der folgenden Zahlen sind durch 14 teilbar? Verifiziere deine Antwort, indem du eine ganze Zahl k findest, sodass $a = 14 \cdot k$.

$$33 \quad 84 \quad 462 \quad 540 \quad -728$$

(f) Sei a eine Zahl, die durch 42 teilbar ist. Welche Form hat die Zahl nach der Definition der Teilbarkeit? (Skript S.23)

(g) Sei a eine Zahl, die durch 14 teilbar ist. Welche Form hat die Zahl nach der Definition der Teilbarkeit? (Skript S.23)

(h) Gib atomare Aussagen an, sodass die Implikationsfolge $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$ erfüllt ist.

(i) Gib für jeden Zwischenschritt in deiner obigen Implikationsfolge eine Begründung an.

(j) Beweise den obigen Satz, d.h. zeige, dass jede Zahl, die durch 42 teilbar ist auch durch 14 teilbar ist.

Aufgabe 2: Kontraposition

Sei $a \in \mathbb{Z}$.
Beweise: *Wenn a^{32} eine ungerade Zahl ist, dann ist a^4 ebenfalls eine ungerade Zahl.*

Folgende Überlegungen können hilfreich sein.

(a) Wie lautet die Voraussetzung A und die Folgerung B?

(b) Wie lauten die Negation von A und B?

(c) Welche Form hat eine Zahl, die gerade ist?

(d) Finde Zwischenaussagen, sodass die Implikationsreihenfolge $\neg B \Rightarrow A_1 \cdots A_n \Rightarrow \neg A$ gilt.

(e) Begründe die Schritte, die jeweils zur nächsten Zwischenaussage führen.

Aufgabe 3: Beweis durch Widerspruch

Beweise: *$a + b$ ist durch 7 teilbar, wenn a und b durch 7 teilbar sind* durch Widerspruch.

Folgende Überlegungen können hilfreich sein.

(a) Wie lautet die Voraussetzung A und die Folgerung B?

(b) Wie lautet die Negation von B?

(c) Welche Form hat eine Zahl, die durch 7 teilbar ist?

(d) Finde Zwischenaussagen, sodass die Implikationsreihenfolge (A und $\neg B$) $\Rightarrow A_1 \cdots A_n \Rightarrow F$ gilt, wobei F eine falsche Aussage darstellt.

(e) Begründe die Schritte, die jeweils zur nächsten Zwischenaussage führen.

Aufgabe 4: Äquivalenzen

Seien $x, y \in \mathbb{N}$. Beweise bzw. widerlege, welche der folgenden drei Äquivalenzen gelten.

(a) $x \cdot y$ ungerade $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ x und y ungerade

(b) $x \cdot y$ gerade $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ x und y gerade

(c) $x \cdot y$ gerade $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ x oder y gerade

Viel Erfolg!