



Tag 3a - Induktion und Rekursion

Aufgabe 1: Quiz Summen und Produkte

1.

1. Welche(r) Term(e) ergeben 14?

- a) $\sum_{i=2}^5 i$
- b) $\sum_{i=1}^3 (2^i - 1)$
- c) $\sum_{i=0}^3 (5 - i)$

2. Welche(r) Term(e) ergeben 7?

- a) $\sum_{i=1}^7 i$
- b) $\sum_{i=3}^4 (2i - i)$
- c) $\sum_{i=1}^7 1$

3. Welche(r) Term(e) ergeben 15?

- a) $\prod_{i=0}^1 \prod_{j=0}^2 (2j + i)$
- b) $\prod_{i=0}^1 \sum_{j=0}^2 (2j + i)$
- c) $\sum_{i=0}^1 \prod_{j=0}^2 (2j + i)$

Aufgabe 2: Quiz Rekursion

Welche der folgenden Funktionen $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ terminieren immer?

Hinweis: \mathbb{N}_0 bezeichnet die natürlichen Zahlen inklusive der 0.

(a)

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 1, & \text{falls } n = 1 \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst} \end{cases}$$

(b)

$$f(n) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ f(n-1) + f(n-2), & \text{sonst} \end{cases}$$

(c)

$$f(n) := \begin{cases} 5, & \text{falls } n = 1 \\ 3 + f(n/2), & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 5 - f(n+1), & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 3: Rekursion

Die Funktion $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ sei gegeben durch die Vorschrift

$$f(n) := \begin{cases} 3, & \text{falls } n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ und $f(4)$.

Aufgabe 4: Ungerade Zahlen

Summiert man die ersten ungeraden Zahlen, so erhält man *anscheinend* stets eine Quadratzahl:

$$\begin{array}{rclclcl} 1 & = & 1 & = & 1^2 \\ 3 + 1 & = & 4 & = & 2^2 \\ 5 + 3 + 1 & = & 9 & = & 3^2 \\ 7 + 5 + 3 + 1 & = & 16 & = & 4^2 \\ 9 + 7 + 5 + 3 + 1 & = & 25 & = & 5^2 \end{array}$$

Dieser Umstand soll in allgemeiner Form bewiesen werden (s.u.). Hierzu ein paar Erläuterungen:

Eine *gerade* Zahl lässt sich in der Form $2 \cdot n$ schreiben mit $n \in \mathbb{N}_0$.

Eine *ungerade* Zahl lässt sich in der Form $2 \cdot n + 1$ schreiben mit $n \in \mathbb{N}_0$.

In den obigen fünf Summen gilt: Ist der letzte Summand die Zahl $2n + 1$, so ist der Wert der Summe $(n + 1)^2$. In der letzten Beispielzeile wird bis $9 = 2 \cdot 4 + 1$ summiert und die Summe ergibt $(4 + 1)^2 = 5^2$.

Achtung: Dies alles ist nur eine Erläuterung der zu beweisenden Formel. Wir haben noch keinen Beweis für die allgemeine Formel geführt!

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{i=0}^n (2i + 1) = (n + 1)^2$$

Aufgabe 5: Rekursive Definition

Gib eine rekursive Funktion $\text{fib}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ an, die die Fibonacci-Zahlen berechnet. Die Fibonacci-Zahlen sind eine Folge von Zahlen, wobei die ersten beiden Zahlen 0 und 1 sind und die nachfolgende Zahl immer die Summe der beiden vorangegangenen Zahlen ist. Die Folge lautet also: 0, 1, 1, 2, 3, 5, ...

Aufgabe 6: Rekursion und Induktion

n Personen treffen sich und jede schüttelt jeder anderen einmal die Hand. Wie viele Händedrucke gibt das? Löse das Problem rekursiv.

Viel Erfolg!