

Induktion und Rekursion

Vorsemesterkurs
Sommersemester 2019
Ronja Düffel

05. April 2019

Der kleine Gauß



Der kleine Gauß

- **Aufgabe:** addiert die ersten 100 Zahlen zusammen
berechnet $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$
- **Vermutung:** Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

- **Beweis** durch vollständige Induktion

Summen und Produkte

Definition (Summen und Produkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und seien a_1, a_2, \dots, a_n beliebige Zahlen. Dann ist:

- $\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_n$

insbesondere ist die leere Summe: $\sum_{i=1}^0 a_i = 0$.

- $\prod_{i=1}^n a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$

insbesondere ist das leere Produkt: $\prod_{i=1}^0 a_i = 1$.

Vollständige Induktion

Vollständige Induktion

Ziel

Ziel

beweise, dass eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel

Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Induktionsprinzip

SchlieÙe vom Besonderen auf das Allgemeine.

- 1 **Induktionsanfang:** Zeige, dass A für den kleinsten Wert von n , für den die Aussage gelten soll, gilt.
- 2 **Induktionsschritt:** zeige, dass für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: falls $A(n)$ gilt, dann gilt auch $A(n + 1)$.

Insbesondere gilt dann

- $A(2)$, wenn $A(1)$ wahr ist,

damit gilt aber auch

- $A(3)$, da $A(2)$ gilt,
- $A(4)$, da $A(3)$ gilt, usw.

Domino-Effekt

kleiner Gauß

Satz (kleiner Gauß)

$A(n)$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang: $A(1)$

Behauptung: Der Satz gilt für $n = 1$.

Beweis:

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

kleiner Gauß

Satz (kleiner Gauß)

$A(n)$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsschritt: $A(n) \rightarrow A(n+1)$

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ gilt $A(n)$, also $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsbehauptung: Es gilt $A(n+1)$, also

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

kleiner Gauß

zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n+1} = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n i \right) + (n+1)$$

Induktionsvoraussetzung anwenden

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

erweitern

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$(n+1)$ ausklammern

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

□

Warum geht das?

① Wir haben die Behauptung für ein spezielles n direkt bewiesen

② Wir haben gezeigt:

Wenn die Behauptung für ein **beliebiges** n gilt,
dann gilt sie auch für den Nachfolger $n + 1$.

Damit kann dann für **alle** n argumentiert werden.

Was kann schiefgehen? (1)

Beispiel

Kein Induktionsanfang

$$A(5 \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar}) \rightarrow B(7 \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar})$$

- *logisch korrekte Schlussfolgerung*
- *Aussage ist trotzdem falsch, da Voraussetzung nicht gegeben ist.*

Was kann schiefgehen? (2)

Beispiel (kein konstruktives Argument im Induktionsschritt)

Behauptung: *In einen Koffer passen unendlich viele Socken.*

Induktionsanfang: $n = 1$ *In einen leeren Koffer passt ein Paar Socken.*

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Induktionsvoraussetzung: n Paar Socken passen in den Koffer.

Induktionsbehauptung: $n + 1$ Paar Socken passen in den Koffer.

Beweis: n Paar Socken befinden sich im Koffer. Aus Erfahrung weißman, ein Paar Socken passt immer noch rein.

$\Rightarrow n + 1$ Paar Socken passen in den Koffer.

\Rightarrow *unendlich viele Socken passen in den Koffer. ?????*

Konstruktives Argument hätte sagen müssen wo genau die Lücke für das extra Paar Socken ist.

Was kann schiefgehen? (3)

Beispiel (fehlerhafte Induktion)

Behauptung: *Alle Menschen einer Menge M mit $|M| = n$ sind gleich groß.*

Induktionsanfang: $n = 1$ *In einer Menge M in der sich nur ein Mensch befindet, sind alle Menschen gleich groß.*

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Sei $M = \{m_1, \dots, m_{n+1}\}$, $M' = \{m_1, \dots, m_n\}$ und $M'' = \{m_2, \dots, m_{n+1}\}$.

$|M'| = |M''| = n \Rightarrow$ *die Menschen in M' und M'' sind jeweils gleich groß.*

$m_2 \in M'$ und $m_2 \in M'' \Rightarrow$ *alle Menschen in M' und M'' gleich groß.*

$M = M' \cup M'' \Rightarrow$ *alle Menschen in M sind gleich groß.*

Induktionsschritt scheitert bei $n = 1$, da $M' = \{m_1\}$ und $M'' = \{m_2\}$.

Wann anwendbar?

- Beweis von Aussagen, die sich auf Objekte beziehen, die als natürliche Zahlen betrachtet werden können.
z.B. Geraden, Spielzüge, Menschen, Socken...
- es muss sich $A(n + 1)$ aus $A(n)$ folgern lassen.
- Aussagen über rekursiv definierte Mengen oder Funktionen.

Rekursion

Rekursion

Definition

*Eine rekursive Funktion ist eine Funktion, die durch sich selbst definiert wird.
Rekursionsanfang: Fall (Fälle) für den (die) die Funktion nicht wieder selbst aufgerufen wird
Rekursionsschritt: rekursiver Aufruf der Funktion.*

Beispiel (Fakultätsfunktion)

$$f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$$

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Fakultätsfunktion

$$f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$$

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 1 \cdot f(0) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$f(2) = 2 \cdot f(1) = 2 \cdot (1 \cdot f(0)) = 2 \cdot (1 \cdot 1) = 2$$

$$f(3) = 3 \cdot f(2) = 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 1)) = 6$$

Man schreibt auch $f(n) = n!$

Satz

Für die Fakultätsfunktion $f(n)$ gilt: $f(n) = \prod_{i=1}^n i$.

Beweis durch vollständige Induktion

Induktionsanfang: $n = 0$

Behauptung: Der Satz gilt für $n = 0$.

Beweis: Es gilt: $f(0) = 1$. Ferner gilt: $\prod_{i=1}^0 i = 1$.

Somit gilt: $f(0) = 1 = \prod_{i=1}^0 i$.

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Induktionsvoraussetzung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f(n) = \prod_{i=1}^n i$.

Induktionsbehauptung: Es gilt: $f(n + 1) = \prod_{i=1}^{n+1} i$.

Induktionsbehauptung: Es gilt: $f(n+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i$.

Beweis:

$$f(n+1) = (n+1) \cdot f(n)$$

Induktionvoraussetzung

$$= (n+1) \cdot \prod_{i=1}^n i$$

$$= (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$= \prod_{i=1}^{n+1} i$$



Sind wir fertig?

① Wir haben die Behauptung für $n = 0$ gezeigt.

② Wir haben gezeigt:

Wenn die Behauptung für n gilt, **dann** gilt sie auch für $n + 1$.

wichtig: Verwendung der Induktionsvoraussetzung

ideale Kaninchen

- Ein Kaninchenpaar (m,w)
- ist nach einem Monat geschlechtsreif
- gebären nach einem Monat Tragzeit ein weiteres Kaninchenpaar
- Kaninchen sterben nie
- Wie viele Kaninchenpaare nach n Monaten (K_n) ?

Karnickel

1. Monat \rightarrow 1

Paar

2. Monat \rightarrow 1

Paar

3. Monat \rightarrow 2

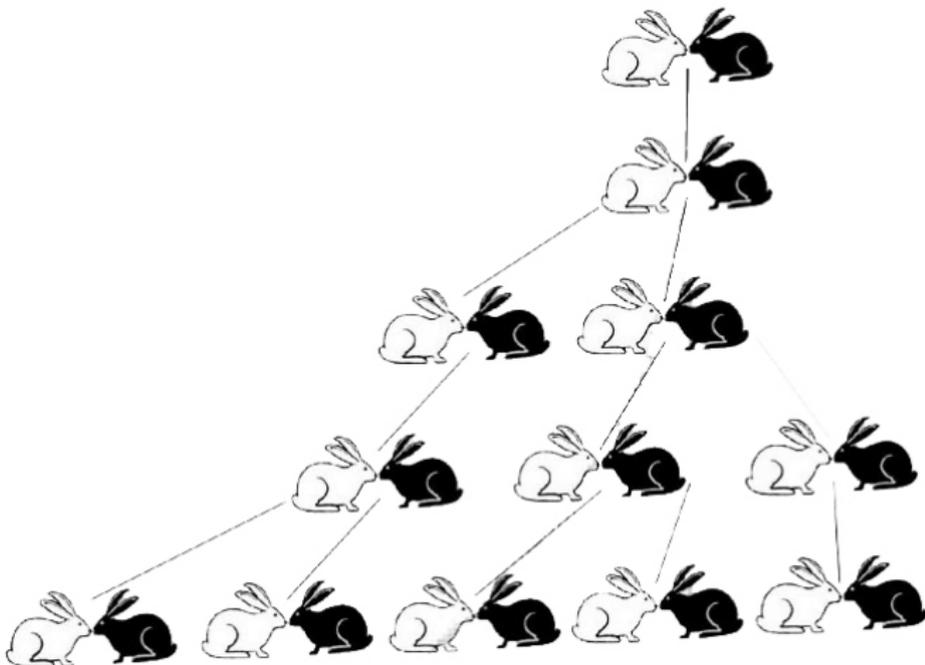
Paare

4. Monat \rightarrow 3

Paare

5. Monat \rightarrow 5

Paare



Karnickel

Wie viele (ideale) Kaninchenpaare K_n habe ich nach n Monaten?

- Die Kaninchen sterben nie

$$K_n = K_{n-1} + \text{die Neugeborenen}$$

- ab dem zweiten Lebensmonat, jeden Monat ein neues Paar
 - alle Paare, die mindestens 2 Monate alt sind, bekommen Nachwuchs
 - Anzahl der Neugeborenen in Monat n : K_{n-2}

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-2}$$

Türme von Hanoi

Regeln:

- nur eine Scheibe bewegen
- niemals eine größere auf eine kleinere Scheibe legen.

Algorithmus Türme von Hanoi

Algorithmus

```
1 function hanoi(n, start, ziel, hilf){
2   if (n > 1){
3     hanoi(n-1,start,hilf,ziel)
4   }
5   verschiebe Scheibe n von start auf ziel
6   if (n > 1){
7     hanoi(n-1,hilf,ziel,start)
8   }
9 }
```

Anzahl der Spielzüge

| | | |
|---------|--|--------|
| $n = 1$ | Schiebe 1 von A nach B | 1 Zug |
| $n = 2$ | $1 \curvearrowright C, 2 \curvearrowright B, 1 \curvearrowright B$ | 3 Züge |
| $n = 3$ | $1 \curvearrowright B, 2 \curvearrowright C, 1 \curvearrowright C, 3 \curvearrowright B, 1 \curvearrowright A, 2 \curvearrowright B, 1 \curvearrowright B$ | 7 Züge |

Satz

Um n Scheiben von einem Stapel zu einem anderen zu transportieren, werden mindestens $2^n - 1$ Spielzüge benötigt.

Beweis Anzahl der Spielzüge

Induktionsanfang: $n = 1$

Behauptung: Um eine Scheibe von A nach B zu setzen, werden $2^1 - 1 = 1$ Spielzüge benötigt.

Beweis: offensichtlich korrekt, wir setzen die Scheibe von A nach B.

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Induktionsvoraussetzung: Um n Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^n - 1$ Spielzüge benötigt.

Induktionsbehauptung: Um $n + 1$ Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^{n+1} - 1$ Spielzüge benötigt.

Induktionsbehauptung: Um $n + 1$ Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^{n+1} - 1$ Spielzüge benötigt.

Beweis:

- 1 transportiere n Scheiben von start auf hilf
- 2 transportiere Scheibe $n + 1$ von start auf ziel
- 3 transportiere n Scheiben von hilf auf ziel

$$2^n - 1 + 1 + 2^n - 1 = 2^n + 2^n - 1 + 1 - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

□

Turm von Benares

- bei 64 Scheiben, benötigen die Mönche $2^{64} - 1$ Züge
- bei 1 Zug pro Sekunde sind das 18 446 744 073 709 551 615 Sekunden
- das entspricht 584 942 417 400 Jahren

gefärbte Flächen

Satz

Teilt man ein Rechteck durch Geraden in Teilflächen, so kann man die Teilflächen immer so mit den Farben Schwarz und Weiß färben, dass Teilflächen, die an einer Kante zusammenstoßen, verschiedene Farben besitzen.

Fragen?

?