



Tag 4b - Logik und Beweise

Aufgabe 1: Direkter Beweis durch Umformen

Zeige durch Umformen, dass für $x, n \in \mathbb{N}, x \neq 1$ gilt:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Aufgabe 2: Beweise oder widerlege

Betrachte die folgenden Aussagen und entscheide, ob sie wahr oder falsch sind.

Wenn sie wahr sind, dann beweise.

Wenn sie falsch sind, dann widerlege die Aussage, d.h. gib ein Beispiel an, das zeigt, dass die Aussage nicht stimmen kann.

- Sei a eine natürliche Zahl. Wenn a^3 gerade ist, dann ist a^4 gerade.
- Wenn n oder m durch 3 teilbar sind, dann ist auch die Summe $n + m$ durch 3 teilbar.
- Wenn a und b ungerade Zahlen sind, dann ist auch die Summe $a + b$ ungerade.
- Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist und eine weitere Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist deren Summe durch 7 teilbar.
- Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist und eine weitere Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist deren Produkt durch 7 teilbar.
- Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, dann ist deren Quadrat ebenfalls durch 3 teilbar.

Aufgabe 3: Die Summe ungerader Zahlen

Kann die Summe von 111 ungeraden Zahlen gerade sein? Untermauer deine Antwort mit einem Beweis.

Aufgabe 4: Die Magische Zahl $z = p^2 - 1$

Beweise: Sei $p \geq 5$ eine Primzahl.

- Dann ist die Zahl $z = p^2 - 1$ durch 3 teilbar.
- Dann ist die Zahl $z = p^2 - 1$ durch 2 teilbar.
- Dann ist die Zahl $z = p^2 - 1$ durch 4 teilbar.
- Dann ist die Zahl $z = p^2 - 1$ durch 24 teilbar.

Hinweis: $p^2 - 1 = (p - 1) \cdot (p + 1)$

Aufgabe 5: Bonbons

Der Lehrer hat für die 28 Kinder in seiner Klasse 28 Bonbons mitgebracht. Jedoch ist ein Kind heute krank. Beweise, dass wenn der Lehrer selbst kein Bonbon nimmt und alle Bonbons verteilt, mindestens ein Kind mehr als ein Bonbon bekommt.

Aufgabe 6: Die Summe dreier Zahlen

Beweise den folgenden Satz.

Die Summe von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist durch 3 teilbar.

Viel Erfolg!