Tag 6 - Euklidischer Algorithmus und Modulo-Rechnung

Aufgabe 1: Teilbarkeit von Linearkombinationen

Es seien a und b ganze Zahlen und $d \in \mathbb{Z}$ ein gemeinsamer Teiler von a und b. Zeige, dass d dann für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ auch ein Teiler von $k \cdot a + l \cdot b$ ist.

Aufgabe 2: Der größte gemeinsame Teiler

i) Bestimmen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den ggT von

$$a)\ 360 = 2^3 3^2 5 \text{ und } 462 = 2^1 3^1 7^1 11^1 \quad b)\ 7468 \text{ und } 2464$$
$$c)\ 45 \text{ und } 3741 \quad d)\ 89 \text{ und } 144$$

ii) Welche beiden natürlichen Zahlen sind die kleinsten[1], sodass der Euklidische Algorithmus genau

a) 4 Divisionen mit Rest benötigt?[2]

b) 5 Divisionen mit Rest benötigt?

c) n Divisionen mit Rest benötigt, wenn f_{n-2} und f_{n-1} die beiden entsprechenden Zahlen für $n-1$ Divisionen mit Rest sind?

Aufgabe 3: Multiplikation von Restklassen

Wir definieren die Multiplikation von Restklassen modulo m wie folgt:

$$[a]_m \cdot [b]_m := [a \cdot b]_m$$

i) Berechne a) $[5]_{11} \cdot [7]_{11}$ b) $[5]_{11} \cdot [18]_{11}$ c) $[-6]_{11} \cdot [7]_{11}$ d) $[5]_6 \cdot [2]_6$ e) $[-1]_6 \cdot [14]_6$ f) $[-7]_6 \cdot [20]_6$

ii) *Dies hätte man eigentlich machen müssen, bevor man die Rechnungen aus i) machen darf:*

Beweise, dass obige Vorschrift für die Multiplikation von Restklassen modulo m *wohldefiniert* ist.

Aufgabe 4: Teilbarkeitsregeln

i) Beweise die Teilbarkeitsregel: Eine natürliche Zahl n ist durch 3 teilbar, genau dann, wenn ihre Quersumme (im Dezimalsystem) durch 3 teilbar ist.

ii) Überlege eine ähnliche Teilbarkeitsregel für Teilbarkeit durch 11.

iii) Es seien a und b zwei Ziffern, also $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Zeige, dass die Zahl $n = ababab$ (Dezimaldarstellung, nicht Produkt) durch 7 teilbar ist.

Aufgabe 5: Modulo-Gleichungen lösen

Löse (wenn möglich) die folgenden Gleichungen nach $[x]$:

a) $[5]_{13} \cdot [x]_{13} = [1]_{13}$ b) $[x]_{462} \cdot [360]_{462} = [12]_{462}$ c) $[5]_{13} \cdot [x]_{13} = [6]_{13}$
d) $[5]_{13} + [x]_{13} = [1]_{13}$ e) $[-5]_{13} + [5]_{13} \cdot [x]_{13} = [1]_{13}$ f) $[8]_{12} \cdot [x]_{12} = [6]_{12}$
g) $[8]_{12} \cdot [x]_{12} = [4]_{12}$ h) $[3]_8 \cdot [x]_8 = [6]_8$ i) $[3]_8 \cdot [x]_8 = [5]_8$

Viel Erfolg!

[1] dabei sei $(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a < c$ oder ($a = b$ und $b \leq d$)
[2] auch die letzte Division mit Rest 0 zählt als eine Division mit Rest