



Tag 1b - Codierung und Bool'sche Algebra

Aufgabe 1: Ternärer Code

Im Ternären Code stehen statt zwei Zeichen, drei Zeichen $\{0, 1, 2\}$ zur Verfügung, um Information zu codieren. Z.B. entspricht die Ternärzahl 1020_3 der Dezimalzahl 33_{10} .

- (a) Formen Sie die folgenden Ternärzahlen in Dezimalzahlen um:
- i) 2101_3
 - ii) 10220_3
- (b) Formen Sie die folgenden Dezimalzahlen in Ternärzahlen um:
- i) 42_{10}
 - ii) 111_{10}
 - iii) 79_{10}

Solution:

- (a) i) $2101_3 = 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 2 \cdot 27 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 1 = 54 + 9 + 1 = 64_{10}$
- ii) $10220_3 = 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 = 81 + 18 + 6 = 105_{10}$
- (b) i) $42_{10} = 1120_3$
- | | | | |
|----------|--------|------|---|
| $42 : 3$ | $= 14$ | Rest | 0 |
| $14 : 3$ | $= 4$ | Rest | 2 |
| $4 : 3$ | $= 1$ | Rest | 1 |
| $1 : 3$ | $= 0$ | Rest | 1 |
- ii) $111_{10} = 11010_3$
- | | | | |
|-----------|--------|------|---|
| $111 : 3$ | $= 37$ | Rest | 0 |
| $37 : 3$ | $= 12$ | Rest | 1 |
| $12 : 3$ | $= 4$ | Rest | 0 |
| $4 : 3$ | $= 1$ | Rest | 1 |
| $1 : 3$ | $= 0$ | Rest | 1 |
- iii) $79_{10} = 2221_3$
- | | | | |
|----------|--------|------|---|
| $79 : 3$ | $= 26$ | Rest | 1 |
| $26 : 3$ | $= 8$ | Rest | 2 |
| $8 : 3$ | $= 2$ | Rest | 2 |
| $2 : 3$ | $= 0$ | Rest | 2 |

Aufgabe 2: Rechenregeln der Schaltalgebra

Zeigen Sie durch Umformungen nach den Gesetzen der Schaltalgebra, dass folgende Gleichungen gelten:

- (a) **Absorptionsgesetze**
- i) $a \vee (a \wedge b) = a$
 - ii) $a \wedge (a \vee b) = a$
- (b) **Resolutionsregeln**

- i) $(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) = a$
- ii) $(a \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}) = a$

Solution:

(a) **Absorptionsgesetze**

i)

$$\begin{aligned}
 a \vee (a \wedge b) &= (a \wedge 1) \vee (a \wedge b) && \text{Neutrales Element} \\
 &= a \wedge (1 \vee b) && \text{Distributivgesetz} \\
 &= a \wedge 1 && \text{Reduktionsgesetz} \\
 &= a && \text{Neutrales Element}
 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
 a \wedge (a \vee b) &= (a \vee 0) \wedge (a \vee b) && \text{Neutrales Element} \\
 &= a \vee (0 \wedge b) && \text{Distributivgesetz} \\
 &= a \vee 0 && \text{Reduktionsgesetz} \\
 &= a && \text{Neutrales Element}
 \end{aligned}$$

(b) **Resolutionsregeln**

i)

$$\begin{aligned}
 (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) &= a \wedge (b \vee \bar{b}) && \text{Distributivgesetz} \\
 &= a \wedge 1 && \text{Inverse Elemente} \\
 &= a && \text{Reduktionsgesetz}
 \end{aligned}$$

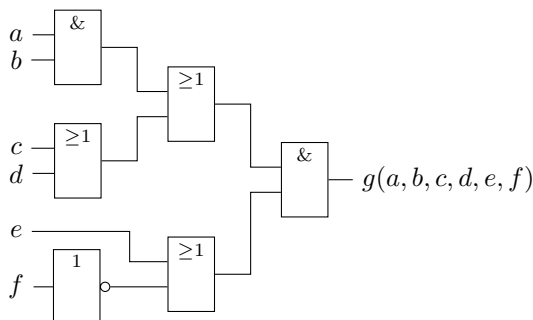
ii)

$$\begin{aligned}
 (a \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}) &= (a \wedge a) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge b) \vee (b \wedge \bar{b}) && \text{Distributivgesetz} \\
 &= a \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge b) \vee 0 && \text{Idempotenz und Inverse Elemente} \\
 &= a \vee (a \wedge b) && \text{Absorption und Neutrale Elemente} \\
 &= a && \text{Absorptionsgesetz}
 \end{aligned}$$

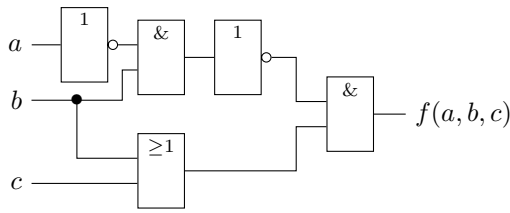
Aufgabe 3: Schaltungen als Schaltfunktion

Geben Sie für folgende Schaltungen jeweils eine Funktionsgleichung an.

(a)



(b)



(c) Geben Sie für folgende Gleichungen jeweils eine Schaltung an.

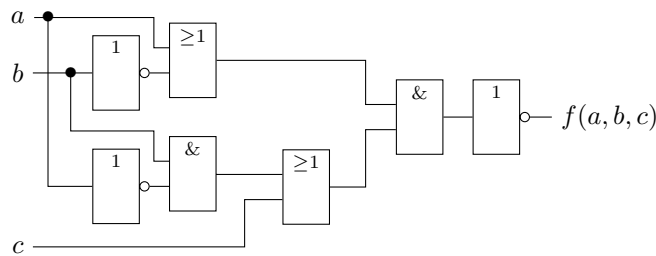
- i) $(a \vee \bar{b}) \wedge (c \vee \bar{a} \wedge b)$
- ii) $a \wedge (b \vee (c \vee d))$

Solution:

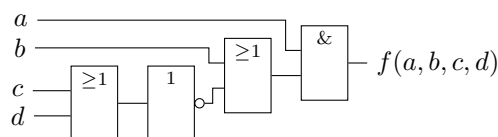
(a) $g(a, b, c, d, e, f) = ((a \wedge b) \vee (c \vee d)) \wedge (e \vee \bar{f})$

(b) $f(a, b, c) = (\bar{a} \wedge \bar{b}) \wedge (b \vee c)$

(c) i)

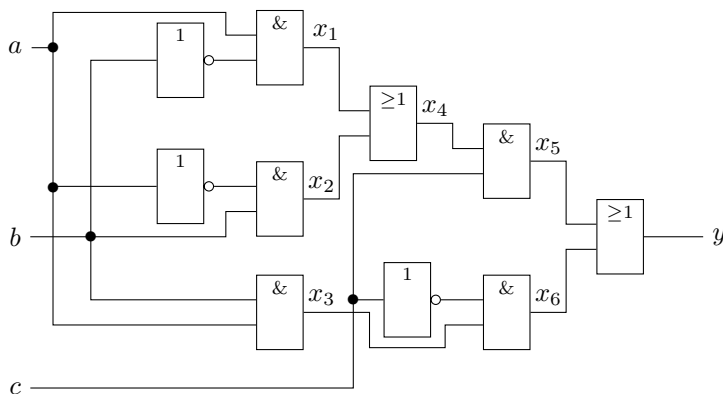


ii)



Aufgabe 4: Noch eine Schaltung

Welche Funktion implementiert die folgende Schaltung?



Hinweis: An den schwarzen Punkten verzweigen sich Leitungen. Es kann hilfreich sein, zunächst die Wahrheitstabelle aufzustellen. Die Bezeichnungen x_i sind lediglich Kommunikationshilfen für den Chat.

Solution:

Wahrheitstabelle:

| a | b | c | x_1 | x_2 | x_4 | x_5 | x_3 | x_6 | $f(a, b, c)$ |
|-----|-----|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Funktion:

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= (((a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)) \wedge c) \vee ((a \wedge b) \wedge \bar{c}) \\ &= (a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \bar{c}) \end{aligned}$$

Es handelt sich um die Paritätsfunktion. Der Funktionswert ist genau dann 1, wenn genau zwei der drei Eingangsvariablen 1 sind.

Viel Erfolg!