



## Tag 3a - Minimierung und Schaltungsentwurf

### Aufgabe 1: Minimierung von Funktionen

Bilden Sie für jede Funktion eine minimale Normalform.

(a)  $f_1(a, b, c, d) = (abcd) \vee (\bar{a}bcd) \vee (ab\bar{c}d) \vee (\bar{a}b\bar{c}d) \vee (\bar{a}b\bar{c}\bar{d}) \vee (\bar{a}b\bar{c}d)$

(b)  $f_2(c, d, e, f) = m_0 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_8 \vee m_{12}$

(c)  $f_3(a, b, c) = M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5$

#### Solution:

(a)

$$\begin{aligned} f_1(a, b, c, d) &= (abcd) \vee (\bar{a}bcd) \vee (ab\bar{c}d) \vee (\bar{a}b\bar{c}d) \vee (\bar{a}b\bar{c}\bar{d}) \vee (\bar{a}b\bar{c}d) \\ &= (acd) \vee (abd) \vee (\bar{a}cd) \vee (\bar{a}bd) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f_2(c, d, e, f) &= m_0 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_8 \vee m_{12} \\ &= (\bar{c}\bar{d}\bar{e}\bar{f}) \vee (\bar{c}\bar{d}e\bar{f}) \vee (\bar{c}d\bar{e}\bar{f}) \vee (\bar{c}de\bar{f}) \vee (c\bar{d}\bar{e}\bar{f}) \vee (cd\bar{e}\bar{f}) \\ &= (\bar{c}\bar{d}\bar{f}) \vee (\bar{c}\bar{e}\bar{f}) \vee (\bar{c}d\bar{f}) \vee (d\bar{e}\bar{f}) \vee (c\bar{e}\bar{f}) \\ &= (\bar{c}\bar{f}) \vee (\bar{e}\bar{f}) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f_3(a, b, c) &= M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \\ &= (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \bar{c}) \wedge (a \vee \bar{b} \vee c) \wedge (\bar{a} \vee b \vee c) \wedge (\bar{a} \vee b \vee \bar{c}) \\ &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee \bar{c}) \wedge (\bar{a} \vee b) \\ &= b \wedge (a \vee c) \end{aligned}$$

### Aufgabe 2: Primimplikanten

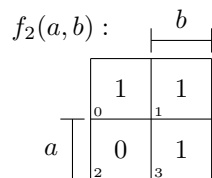
(a) Bestimmen Sie für folgende Funktionen alle Primimplikanten.

i)

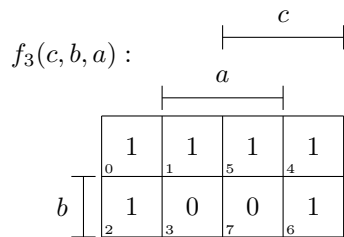
$f_1(a, b) :$

	$b$	
	0	1
$a$	1	1
	0	0
	2	3

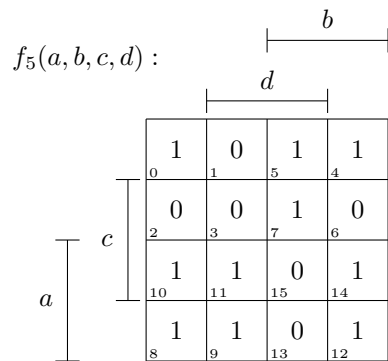
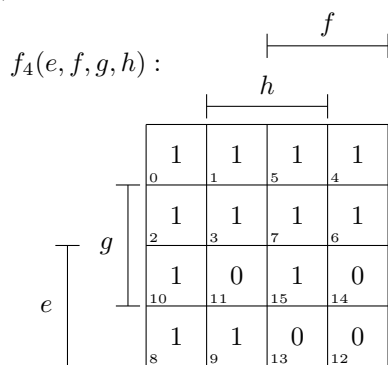
ii)



iii)



iv)

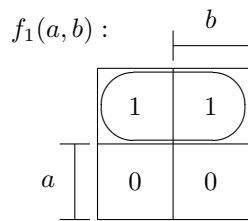


(b) Welche der Primimplikanten sind Kernprimimplikanten, welche sind relativ eliminierbar und welche absolut eliminierbar?

(c) Geben Sie jede Funktion in minimaler DNF an.

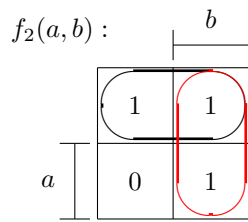
**Solution:** Lösungen zu Aufgabenteilen (b) und (c) stehen direkt unterhalb des KV-Diagramms.

(a) i)

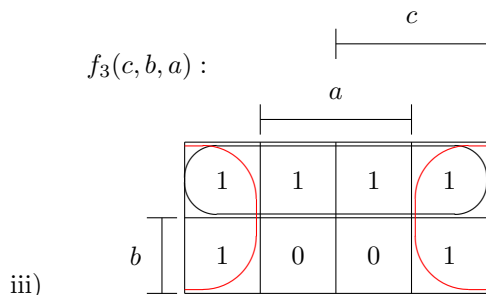


$\bar{a}$ : ist Kernprimimplikant.  
 minimale DNF:  $f_1(a, b) = \bar{a}$ .

ii)

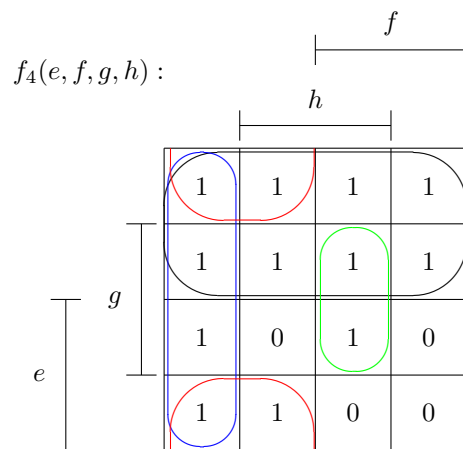


$\bar{a}$  und  $b$  sind beide Kernprimimplikanten.  
 minimale DNF:  $f_2(a, b) = \bar{a} \vee b$



iii)  
 $\bar{b}$  und  $\bar{a}$  sind beide Kernprimimplikanten.  
 minimale DNF:  $f_3(c, b, a) = \bar{a} \vee \bar{b}$

iv)



$\bar{e}$ ,  $\bar{f}\bar{h}$ ,  $fgh$  und  $\bar{f}\bar{g}$  sind alle Kernprimimplikanten.  
 minimale DNF:  $f_4(e, f, g, h) = \bar{e} \vee (\bar{f}\bar{h}) \vee (fgh) \vee (\bar{f}\bar{g})$

$f_5(a, b, c, d) :$

Kernprimimplikanten:  $a\bar{b}$ ,  $a\bar{d}$ ,  $\bar{a}bd$  und  $\bar{c}\bar{d}$   
 absolut eliminierbar:  $\bar{a}b\bar{c}$   
 minimale DNF:  $f_5(a, b, c, d) = (a\bar{b}) \vee (a\bar{d}) \vee (\bar{a}bd) \vee (\bar{c}\bar{d})$

### Aufgabe 3: Don't care

(a) Bestimmen Sie für folgende Funktionen alle Primimplikanten.

i)

$f_1(a, b, c) :$

		a	
		c	
	0	-	1
	1	-	0
b	2	3	7
	4	5	6

ii)

$f_2(a, b, c, d) :$

		b	
		d	
	-	0	1
	0	0	1
	1	-	-
	1	1	0
c	0	1	5
	2	3	7
a	10	11	15
	8	9	13
	4	6	12

iii)

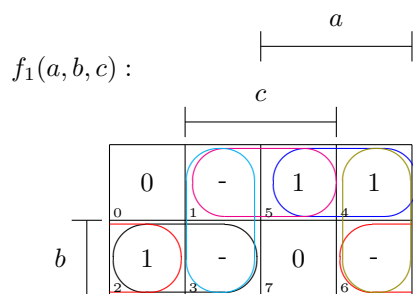
$a$	$b$	$c$	$d$	$f_3(a, b, c, d)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	—
0	1	0	1	0
0	1	1	0	—
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	—
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	—

(b) Welche der Primimplikanten sind Kernprimimplikanten, welche sind absolut eliminierbar und welche relativ eliminierbar?

(c) Geben Sie jede Funktion in minimaler DNF an.

**Solution:**

(a) i)



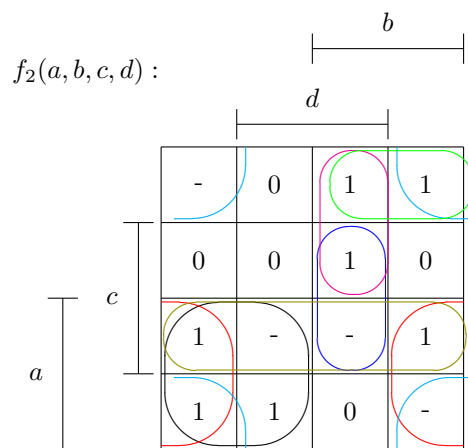
Alle sind relativ eliminierbar, denn alle 1-en sind von mehreren Primimplikanten überdeckt. Wir suchen aber die minimale Überdeckung der 1-en. Also muss  $a\bar{b}$  genommen werden da zwei 1-en enthalten, gegenüber den Alternativen.

Damit werden  $\bar{b}c$ , und  $a\bar{c}$  überflüssig, da die 1-en bereits überdeckt sind.  $\bar{a}c$  fällt sowieso weg, denn er enthält gar keine 1-en

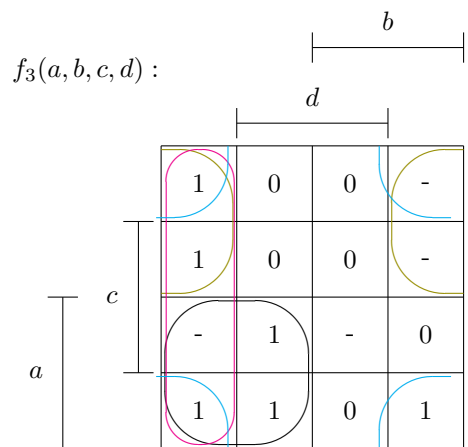
$\bar{b}c$  und  $b\bar{a}$  sind gleichwertige Alternativen zueinander. Daher gibt es zwei Möglichkeiten für die minimale DNF:  $f_3(a, b, c) = (a\bar{b}) \vee (b\bar{c})$  oder

$$f_3(a, b, c) = (a\bar{b}) \vee (b\bar{a})$$

ii)



Kernprimimplikant:  $a\bar{b}$   
 relativ eliminierbar:  $a\bar{d}$ ,  $ac$ ,  $\bar{c}\bar{d}$ ,  $\bar{a}b\bar{c}$ ,  $\bar{a}bd$  und  $bcd$ .  
 minimale DNF:  $f_2(a, b, c, d) = (a\bar{b}) \vee (a\bar{d}) \vee (\bar{c}\bar{d}) \vee (\bar{a}bd)$



Kernprimimplikanten:  $a\bar{b}$ ,  $\bar{c}\bar{d}$   
 relativ eliminierbar:  $\bar{a}\bar{d}$ ,  $\bar{b}\bar{d}$   
 minimale DNF:  $f_3(a, b, c, d) = (a\bar{b}) \vee (\bar{c}\bar{d}) \vee (\bar{a}\bar{d})$  alternativ ginge auch:  
 $f_3(a, b, c, d) = (a\bar{b}) \vee (\bar{c}\bar{d}) \vee (\bar{b}\bar{d})$

#### Aufgabe 4: Primzahlen

Entwickeln Sie eine Schaltung mit vier Eingangssignalen, die für alle Zahlen zwischen 0 und 15 den Wert 1 liefert, wenn es sich bei der Zahl um eine Primzahl handelt.

*Hinweis: die Zahlen können über die vier Eingangsvariablen binär codiert eingegeben werden.*

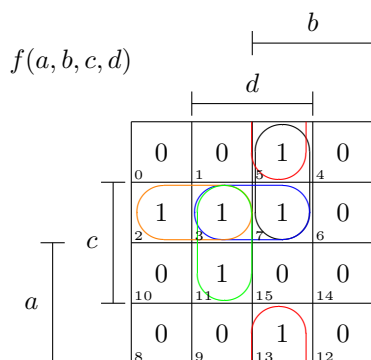
**Solution:** Zunächst sollte eine Wahrheitstabelle aufgestellt werden, um die Schaltfunktion auf zu stellen.

$a$	$b$	$c$	$d$	Prim
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Dann aus der Wahrheitstabelle die KDNF der Schaltfunktion aufstellen.

$$f(a, b, c, d) = (\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}) \vee (\bar{a}\bar{b}cd) \vee (\bar{a}b\bar{c}\bar{d}) \vee (\bar{a}bcd) \vee (a\bar{b}\bar{c}d)$$

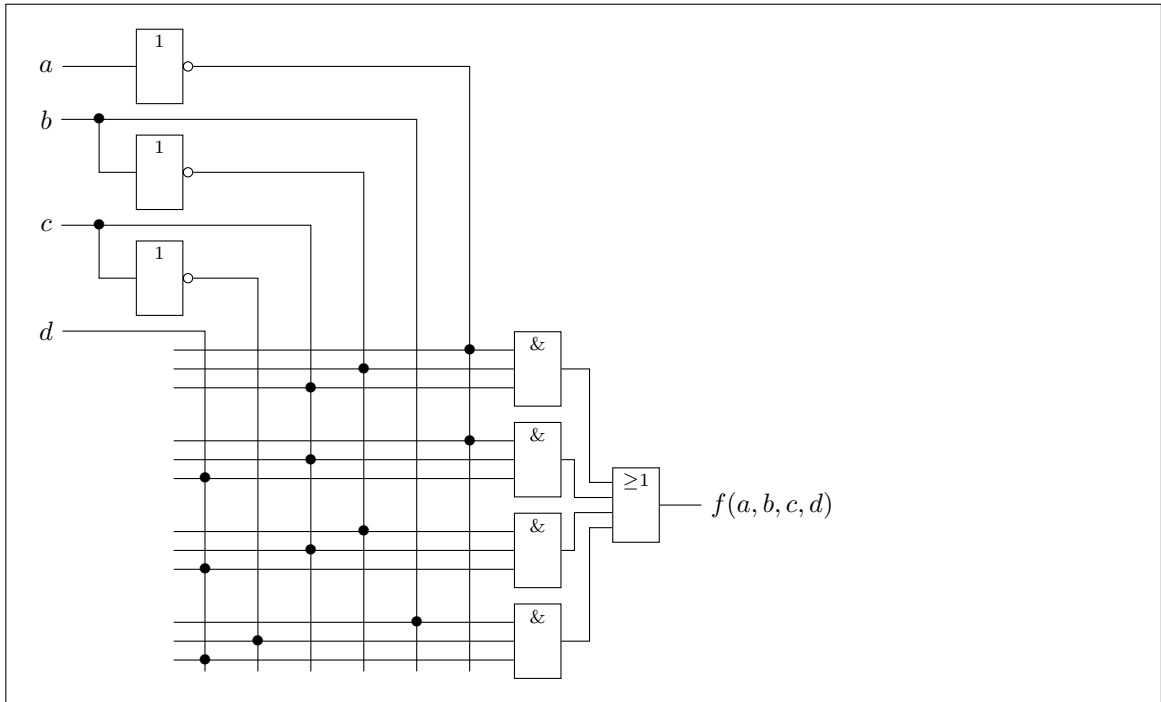
Dann das KV-Diagramm benutzen, um die Schaltung zu minimieren.



Hier gibt's mehrere Möglichkeiten. Primimplikanten rot, grün und gelb müssen wir nehmen, der blaue und schwarze sind relativ eliminierbar.

$$f(a, b, c, d) = (\bar{a}\bar{b}c) \vee (\bar{a}cd) \vee (\bar{b}cd) \vee (b\bar{c}d)$$

Die Schaltung zeichnen:



Viel Erfolg!