



## Tag 1a - Codierung und Bool'sche Algebra

### Aufgabe 1: Binärzahlen

(a) Formen Sie die folgenden Binärzahlen in Dezimalzahlen um.

- i)  $101010_2$
- ii)  $001011_2$
- iii)  $110111_2$
- iv)  $100110_2$

(b) Formen Sie die folgenden Dezimalzahlen in Binärzahlen um.

- i)  $67_{10}$
- ii)  $214_{10}$
- iii)  $1011_{10}$
- iv)  $39_{10}$

#### Solution:

- (a) i)  $101010_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 32 + 8 + 2 = 42_{10}$   
 ii)  $001011_2 = 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11_{10}$   
 iii)  $110111_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 16 + 4 + 2 + 1 = 55_{10}$   
 iv)  $100110_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 32 + 4 + 2 = 38_{10}$

- (b) i)  $67_{10} = 1000011_2$
- |          |        |      |   |
|----------|--------|------|---|
| $67 : 2$ | $= 33$ | Rest | 1 |
| $33 : 2$ | $= 16$ | Rest | 1 |
| $16 : 2$ | $= 8$  | Rest | 0 |
| $8 : 2$  | $= 4$  | Rest | 0 |
| $4 : 2$  | $= 2$  | Rest | 0 |
| $2 : 2$  | $= 1$  | Rest | 0 |
| $1 : 2$  | $= 0$  | Rest | 1 |

- ii)  $214_{10} = 11010110_2$
- |           |         |      |   |
|-----------|---------|------|---|
| $214 : 2$ | $= 107$ | Rest | 0 |
| $107 : 2$ | $= 53$  | Rest | 1 |
| $53 : 2$  | $= 26$  | Rest | 1 |
| $26 : 2$  | $= 13$  | Rest | 0 |
| $13 : 2$  | $= 6$   | Rest | 1 |
| $6 : 2$   | $= 3$   | Rest | 0 |
| $3 : 2$   | $= 1$   | Rest | 1 |
| $1 : 2$   | $= 0$   | Rest | 1 |

- iii)  $1011_{10} = 111110011_2$
- |            |         |      |   |
|------------|---------|------|---|
| $1011 : 2$ | $= 505$ | Rest | 1 |
| $505 : 2$  | $= 252$ | Rest | 1 |
| $252 : 2$  | $= 126$ | Rest | 0 |
| $126 : 2$  | $= 63$  | Rest | 0 |
| $63 : 2$   | $= 31$  | Rest | 1 |
| $31 : 2$   | $= 15$  | Rest | 1 |
| $15 : 2$   | $= 7$   | Rest | 1 |
| $7 : 2$    | $= 3$   | Rest | 1 |
| $3 : 2$    | $= 1$   | Rest | 1 |
| $1 : 2$    | $= 0$   | Rest | 1 |

$$\begin{array}{r}
 \text{iv) } 39_{10} = 100111_2 \\
 39 : 2 = 19 \quad \text{Rest } 1 \\
 19 : 2 = 9 \quad \text{Rest } 1 \\
 9 : 2 = 4 \quad \text{Rest } 1 \\
 4 : 2 = 2 \quad \text{Rest } 0 \\
 2 : 2 = 1 \quad \text{Rest } 0 \\
 1 : 2 = 0 \quad \text{Rest } 1
 \end{array}$$

## Aufgabe 2: Rechenregeln für aussagenlogische Formeln

Machen Sie mithilfe von Wahrheitstabellen deutlich, dass folgende Gleichungen gelten:

(a) **Absorptionsgesetze**

i)  $a \vee (a \wedge b) = a$

ii)  $a \wedge (a \vee b) = a$

(b) **Distributivgesetze**

i)  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

ii)  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

(c) **Resolutionsregeln**

i)  $(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) = a$

ii)  $(a \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}) = a$

(d) **De Morgan'sche Gesetze**

i)  $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$

ii)  $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$

**Solution:**

(a) **Absorptionsgesetze**

$a$	$b$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \vee (a \wedge b)$	$a \wedge (a \vee b)$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

(b) **Distributivgesetze**

$a$	$b$	$c$	$b \wedge c$	$a \vee (b \wedge c)$	$a \vee b$	$a \vee c$	$(a \vee b) \wedge (a \vee c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
i) 0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

$a$	$b$	$c$	$b \vee c$	$a \wedge (b \vee c)$	$a \wedge b$	$a \wedge c$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
ii) 0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(c) Resolutionsregeln

	$a$	$b$	$\bar{b}$	$a \wedge b$	$a \wedge \bar{b}$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b})$
i)	0	0	1	0	0	0
	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	1	1
	1	1	0	1	0	1
	$a$	$b$	$\bar{b}$	$a \vee b$	$a \vee \bar{b}$	$(a \vee b) \wedge (a \vee \bar{b})$
ii)	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0
	1	0	1	1	1	1
	1	1	0	1	1	1

(d) De Morgan'sche Gesetze

	$a$	$b$	$a \wedge b$	$\overline{a \wedge b}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a} \vee \bar{b}$
i)	0	0	0	1	1	1	1
	0	1	0	1	1	0	1
	1	0	0	1	0	1	1
	1	1	1	0	0	0	0
	$a$	$b$	$a \vee b$	$\overline{a \vee b}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a} \wedge \bar{b}$
ii)	0	0	0	1	1	1	1
	0	1	1	0	1	0	0
	1	0	1	0	0	1	0
	1	1	1	0	0	0	0

### Aufgabe 3: Darstellung von Schaltfunktionen

Stellen Sie für folgende Schaltfunktionen Wahrheitstabellen auf:

- (a)  $f(a, b, c) = (a \wedge b) \vee ((a \vee c) \wedge (b \vee c))$
- (b)  $g_1(a, b, c) = (c \vee \bar{a}) \wedge (b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b)$
- (c)  $g_2(a, b, c) = (c \vee \bar{a}) \wedge ((b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b))$
- (d)  $h(a, b, c) = (b \vee c) \wedge \overline{(a \wedge b)}$

**Solution:**

(a)

$a$	$b$	$c$	$a \wedge b$	$a \vee c$	$b \vee c$	$(a \vee c) \wedge (b \vee c)$	$f(a, b, c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(b)

$a$	$b$	$c$	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$c \vee \bar{a}$	$b \wedge \bar{c}$	$a \wedge b$	$(c \vee \bar{a}) \wedge (b \wedge \bar{c})$	$g_1(a, b, c)$
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0	1	0	1

(c)

$a$	$b$	$c$	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$c \vee \bar{a}$	$b \wedge \bar{c}$	$a \wedge b$	$((b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b))$	$g_2(a, b, c)$
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0	1	0	1

(d)

$a$	$b$	$c$	$a \wedge b$	$\overline{(a \wedge b)}$	$b \vee c$	$h(a, b, c)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	1	0

#### Aufgabe 4: Bool'sche Algebra

- (a) Formen Sie die folgenden Gleichungen durch wiederholtes Anwenden der De Morgan'schen Gesetze so um, dass Negationen nur noch über einzelnen Variablen stehen.

Beispiel:  $\overline{(a \wedge b) \vee c} = \overline{(a \wedge b)} \wedge \bar{c} = \overline{(a \vee \bar{b})} \wedge \bar{c} = \bar{a} \wedge \bar{\bar{b}} \wedge \bar{c} = a \wedge b \wedge \bar{c}$ .

- i)  $\overline{(a \vee b) \wedge (c \wedge \bar{d})}$   
 ii)  $\overline{(a \vee b) \vee (c \wedge \bar{d})}$

- (b) Formen Sie die folgenden Gleichungen durch wiederholtes Anwenden der Distributivgesetze so um, dass Sie eine Ver-ODER-ung von UND-Termen erhalten.

Beispiel:  $(a \vee b) \wedge (c \vee d) = ((a \vee b) \wedge c) \vee ((a \vee b) \wedge d) = ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \vee ((a \wedge d) \vee (b \wedge d)) = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge d) \vee (b \wedge d)$

- i)  $(a \wedge b) \vee ((c \vee d) \wedge (b \vee a))$   
 ii)  $(b \vee d) \wedge (a \vee c)$

#### Solution:

- (a) i)

$$\begin{aligned} \overline{(a \vee b) \wedge (c \wedge \bar{d})} &= \overline{(a \wedge \bar{b}) \wedge (c \vee \bar{d})} \\ &= \overline{(a \wedge \bar{b})} \wedge \overline{(c \vee \bar{d})} \end{aligned}$$

- ii)

$$\begin{aligned} \overline{(a \vee b) \vee (c \wedge \bar{d})} &= \overline{(a \vee b)} \wedge \overline{(c \wedge \bar{d})} \\ &= \overline{(a \wedge \bar{b})} \wedge \overline{(c \vee \bar{d})} \\ &= \overline{(a \vee \bar{b})} \wedge \overline{(c \wedge \bar{d})} \\ &= (a \vee b) \wedge (c \wedge \bar{d}) \end{aligned}$$

(b) i)

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee ((c \vee d) \wedge (b \vee a)) &= (a \wedge b) \vee ((c \vee d) \wedge b) \vee ((c \vee d) \wedge a) \\ &= (a \wedge b) \vee ((c \wedge b) \vee (b \wedge d)) \vee ((c \wedge a) \vee (d \wedge a)) \\ &= (a \wedge b) \vee (c \wedge b) \vee (b \wedge d) \vee (c \wedge a) \vee (a \wedge d)\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}(b \vee d) \wedge (a \vee c) &= (b \wedge (a \vee c)) \vee (d \wedge (a \vee c)) \\ &= (a \wedge b) \vee (c \wedge b) \vee (a \wedge d) \vee (d \wedge c)\end{aligned}$$

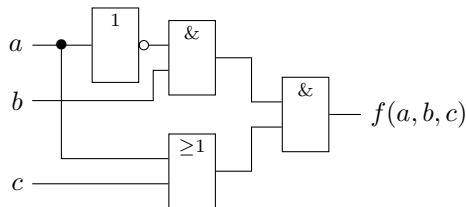
### Aufgabe 5: Schaltungen

(a) Stellen Sie folgende Schaltfunktionen als Schaltung dar:

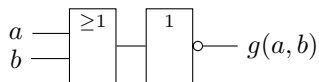
- i)  $g(a, b, c) = (a \vee b) \wedge c$
- ii)  $f(a, b, c, d) = (a \wedge b) \vee (c \vee d)$
- iii)  $h(a, b, c, d) = ((a \wedge c) \vee \bar{b}) \wedge (c \vee \bar{d})$

(b) Geben Sie jeweils die Schaltfunktion zur Schaltung an.

i)

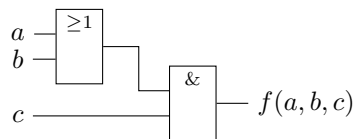


ii)

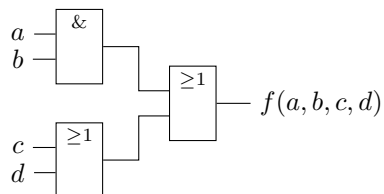


### Solution:

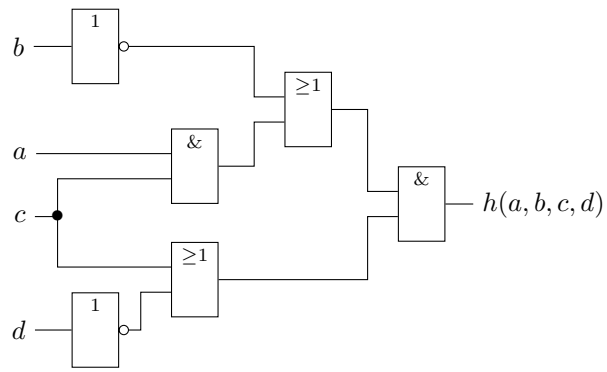
(a) i)



ii)



iii)



- (b) i)  $(\bar{a} \wedge b) \wedge (a \vee c)$   
 ii)  $\overline{(a \vee b)}$

Viel Erfolg!