



Tag 1b - Codierung und Bool'sche Algebra

Aufgabe 1: Ternärer Code

Im Ternären Code stehen statt zwei Zeichen, drei Zeichen $\{0, 1, 2\}$ zur Verfügung, um Information zu codieren. Z.B. entspricht die Ternärzahl 1020_3 der Dezimalzahl 33_{10} .

- (a) Formen Sie die folgenden Ternärzahlen in Dezimalzahlen um:
- 2101_3
 - 10220_3
- (b) Formen Sie die folgenden Dezimalzahlen in Ternärzahlen um:
- 42_{10}
 - 111_{10}
 - 79_{10}

Solution:

(a) i) $2101_3 = 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 2 \cdot 27 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 1 = 54 + 9 + 1 = 64_{10}$

ii) $10220_3 = 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 = 81 + 18 + 6 = 105_{10}$

(b) i) $42_{10} = 1120_3$

$$42 : 3 = 14 \quad \text{Rest } 0$$

$$14 : 3 = 4 \quad \text{Rest } 2$$

$$4 : 3 = 1 \quad \text{Rest } 1$$

$$1 : 3 = 0 \quad \text{Rest } 1$$

ii) $111_{10} = 11010_3$

$$111 : 3 = 37 \quad \text{Rest } 0$$

$$37 : 3 = 12 \quad \text{Rest } 1$$

$$12 : 3 = 4 \quad \text{Rest } 0$$

$$4 : 3 = 1 \quad \text{Rest } 1$$

$$1 : 3 = 0 \quad \text{Rest } 1$$

iii) $79_{10} = 2221_3$

$$79 : 3 = 26 \quad \text{Rest } 1$$

$$26 : 3 = 8 \quad \text{Rest } 2$$

$$8 : 3 = 2 \quad \text{Rest } 2$$

$$2 : 3 = 0 \quad \text{Rest } 2$$

Aufgabe 2: Rechenregeln der Schaltalgebra

Zeigen Sie durch Umformungen nach den Gesetzen der Schaltalgebra, dass folgende Gleichungen gelten:

- (a) **Absorptionsgesetze**

i) $a \vee (a \wedge b) = a$

ii) $a \wedge (a \vee b) = a$

- (b) **Resolutionsregeln**

- i) $(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) = a$
- ii) $(a \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}) = a$

Solution:

(a) **Absorptionsgesetze**

i)

$$\begin{aligned}
 a \vee (a \wedge b) &= (a \wedge 1) \vee (a \wedge b) && \text{Neutrales Element} \\
 &= a \wedge (1 \vee b) && \text{Distributivgesetz} \\
 &= a \wedge 1 && \text{Reduktionsgesetz} \\
 &= a && \text{Neutrales Element}
 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
 a \wedge (a \vee b) &= (a \vee 0) \wedge (a \vee b) && \text{Neutrales Element} \\
 &= a \vee (0 \wedge b) && \text{Distributivgesetz} \\
 &= a \vee 0 && \text{Reduktionsgesetz} \\
 &= a && \text{Neutrales Element}
 \end{aligned}$$

(b) **Resolutionsregeln**

i)

$$\begin{aligned}
 (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) &= a \wedge (b \vee \bar{b}) && \text{Distributivgesetz} \\
 &= a \wedge 1 && \text{Inverse Elemente} \\
 &= a && \text{Reduktionsgesetz}
 \end{aligned}$$

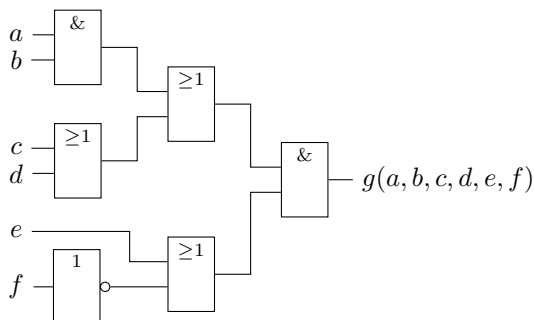
ii)

$$\begin{aligned}
 (a \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}) &= (a \wedge a) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge b) \vee (b \wedge \bar{b}) && \text{Distributivgesetz} \\
 &= a \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge b) \vee 0 && \text{Idempotenz und Inverse Elemente} \\
 &= a \vee (a \wedge b) && \text{Absorption und Neutrale Elemente} \\
 &= a && \text{Absorptionsgesetz}
 \end{aligned}$$

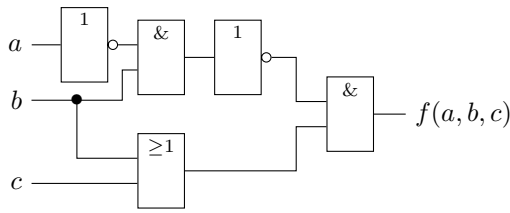
Aufgabe 3: Schaltungen als Schaltfunktion

Geben Sie für folgende Schaltungen jeweils eine Funktionsgleichung an.

(a)



(b)



(c) Geben Sie für folgende Gleichungen jeweils eine Schaltung an.

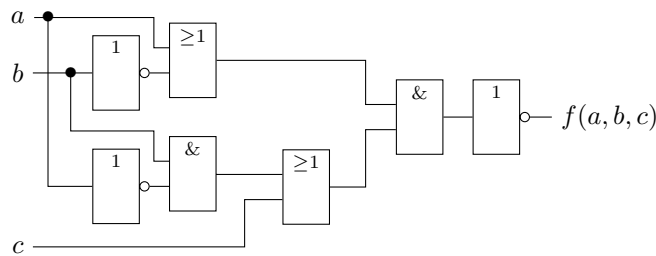
- i) $(a \vee \bar{b}) \wedge (c \vee \bar{a} \wedge b)$
- ii) $a \wedge (b \vee (c \vee d))$

Solution:

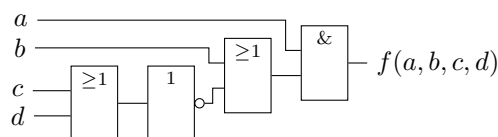
(a) $g(a, b, c, d, e, f) = ((a \wedge b) \vee (c \vee d)) \wedge (e \vee \bar{f})$

(b) $f(a, b, c) = (\bar{a} \wedge \bar{b}) \wedge (b \vee c)$

(c) i)

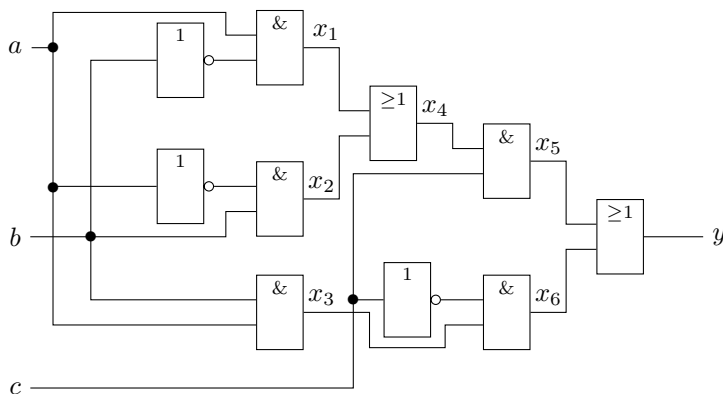


ii)



Aufgabe 4: Noch eine Schaltung

Welche Funktion implementiert die folgende Schaltung?



Hinweis: An den schwarzen Punkten verzweigen sich Leitungen. Es kann hilfreich sein, zunächst die Wahrheitstabelle aufzustellen. Die Bezeichnungen x_i sind lediglich Kommunikationshilfen für den Chat.

Solution:

Wahrheitstabelle:

a	b	c	x_1	x_2	x_4	x_5	x_3	x_6	$f(a, b, c)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

Funktion:

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= (((a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)) \wedge c) \vee ((a \wedge b) \wedge \bar{c}) \\ &= (a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \bar{c}) \end{aligned}$$

Es handelt sich um die Paritätsfunktion. Der Funktionswert ist genau dann 1, wenn genau zwei der drei Eingangsvariablen 1 sind.

Viel Erfolg!