# Digitaltechnik

Vorsemesterkurs
Sommersemester 2021
Ronja Düffel

24. März 2021

# Informationsverarbeitung in digitalen Systemen

- Codierung und Verarbeitung in wertdiskreten Zuständen
- zwei Zustände:

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| false | true |

- technisch als Spannungspegel:

| | | |
|---|---|---|
| hohe Spannung | $\rightarrow$ | H |
| niedrige Spannung | $\rightarrow$ | L |

  - positive Logik: $H \leftarrow 1$, $L \leftarrow 0$
  - negative Logik: $H \leftarrow 0$, $L \leftarrow 1$

# Binärcode

- Zeichen: 0  1 (*Bit*, 8 Bit $\widehat{=}$ 1 Byte)
- n-stellige Binärzahl: $Z_2 = z_{n-1} z_{n-2} \dots z_1 z_0$
- Interpretation: Bit $z_i$ hat Gewicht $2^i$

$$Z_{10} = g(Z_2) = z_{n-1} \cdot 2^{n-1} + z_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + z_1 \cdot 2^1 + z_0 \cdot 2^0$$

- Allgemein für Zahlen zur Basis $b$:

$$Z_{10} = g(Z_b) = z_{n-1} \cdot b^{n-1} + z_{n-2} \cdot b^{n-2} + \dots + z_1 \cdot b^1 + z_0 \cdot b^0$$

**Beispiel (im Dezimalsystem)**

$$425_{10} = 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 = 400 + 20 + 5 = 425$$

# Beispiel Binärsystem

- binär → dezimal

$$11110101_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$
$$= 128 + 64 + 32 + 16 + 4 + 1 = 245_{10}$$

- dezimal → binär
  durch 2 teilen bis 0 rauskommt und Reste von *rechts nach links* **!** notieren.
  Beispiel: $197_{10}$

| | | |
|---|---|---|
| $197 : 2 = 98$ | Rest 1 | $z_0$ |
| $98 : 2 = 49$ | Rest 0 | $z_1$ |
| $49 : 2 = 24$ | Rest 1 | $z_2$ |
| $24 : 2 = 12$ | Rest 0 | $z_3$ |
| $12 : 2 = 6$ | Rest 0 | $z_4$ |
| $6 : 2 = 3$ | Rest 0 | $z_5$ |
| $3 : 2 = 1$ | Rest 1 | $z_6$ |
| $1 : 2 = 0$ | Rest 1 | $z_7$ |

$$197_{10} = 11000101_2$$

# Schaltalgebra

## Definition (Algebra)

*Unter einer Algebra versteht man eine Menge von Elementen und Verknüpfungen auf dieser Menge.*

z.Bsp.:

$$(\mathbb{R}, \cdot, +)$$

Schaltalgebra:

$$(\{1, 0\}, \wedge, \vee, ^-)$$

## Definition (Schaltfunktion)

*Eine Schaltfunktion ist eine Gleichung der Schaltalgebra, die die Abhängigkeit einer oder mehrerer binärer Schaltvariablen $y$ (Ausgangs-) von einer oder mehreren, unabhängigen binären Schaltvariablen $x$ (Eingangsvariable(n))beschreibt.*
*Handelt es sich um mehrere Aus- bzw. Eingangsvariablen, so sind $x$ und $y$ Vektoren.* $x = (a, b, c, \dots)$, $y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$

# Beispiel Schaltfunktion

$$
\begin{aligned}
y &= a \wedge b & \qquad f(a,b) &= a \wedge b \\
y' &= \overline{a} \vee b & \qquad g(a,b) &= \overline{a} \vee b \\
y'' &= \overline{a \vee b \wedge \overline{c}} & \qquad h(a,b,c) &= \overline{a \vee b \wedge \overline{c}}
\end{aligned}
$$

Funktion der allgemeinen Algebra:

$$
y = 3x + 4 \qquad f(x) = 3x + 4
$$

# Noch ein paar Begriffe

## Definition

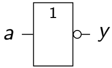
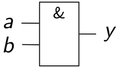
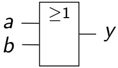
*Schaltvariable:* *binäre Variable, kann die Werte* 0 *oder* 1 *annehmen*

*Stelligkeit:* *Die Stelligkeit einer Schaltfunktion ist die Anzahl ihrer Eingangsvariablen.*

*z.B.:* $f(a) = \overline{a}$ *ist einstellig,*
$y = \overline{a} \vee b$ *ist zweistellig,*
$g(a, b, c, d) = (a \vee b) \wedge (a \wedge d)$ *ist vierstellig.*

*Belegung:* *Die Belegung einer Schaltvariablen ist die Zuweisung eines konkreten Werts* (0 *oder* 1) *an eine Schaltvariable.*
*Die Belegung der Schaltvariablen einer Schaltfunktion kann als Vektor angegeben werden.*
*Bsp: Belegung* $(1, 0)$ *für die Funktion* $g(a, b)$ *bedeutet* $a$ *wird* 1 *und* $b$ *der Wert* 0 *zugewiesen.*

# Grundverknüpfungen $\overline{\phantom{a}}$, $\wedge$, $\vee$

| Operator | Name | Wahrheitstabelle | Schaltzeichen | Funktion |
|---|---|---|---|---|
| $-$ | NICHT, NOT, Komplement, Negation | $\begin{array}{c\|c} a & \bar{a} \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$ |  | $y = f(a) = \bar{a}$ |
| $\wedge$ | UND, AND, Konjunktion | $\begin{array}{cc\|c} a & b & a \wedge b \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$ |  | $y = f(a, b) = a \wedge b$ |
| $\vee$ | ODER, OR, Disjunktion | $\begin{array}{cc\|c} a & b & a \vee b \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$ |  | $y = f(a, b) = a \vee b$ |

STARKER START ins Studium

# Darstellung von Schaltfunktionten

Vier gleichwertige Darstellungsformen von Schaltfunktionen

- Wahrheitstabelle
- Funktionsgleichung
- Schaltzeichen
- KV-Diagramm (machen wir morgen)

# Wahrheitstabelle

- enthält alle möglichen Belegungen der Eingangsvariablen und zugehörigen Funktionswert

## Beispiel

| $a$ | $b$ | $c$ | $f(a, b, c)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

- Bei $n$ Eingangsvariablen $2^n$ Kombinationen.

# Funktionsgleichung

- Jede Schaltfunktion kann allein durch die Grundverknüpfungen $\overline{\ }$, $\wedge$ und $\vee$ dargestellt werden.

## Beispiel

- $g(a, b, c) = a \wedge \overline{b} \vee c$
- $k(a, b, c) = a \wedge b \vee \overline{a} \wedge c$

- Es gilt Negation vor Konjunktion vor Disjunktion. Also $\overline{\ }$ vor $\wedge$ vor $\vee$.
- Klammern setzen, um Auswertungsreihenfolge zu verändern

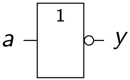
## Beispiel

- $f(a, b, c) = a \vee b \wedge c$
- $h(a, b, c) = (a \vee b) \wedge c$

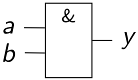
## Beispiel

| $a$ | $b$ | $c$ | $f(a,b,c) = a \vee b \wedge c$ | $a \vee b$ | $h(a,b,c) = (a \vee b) \wedge c$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

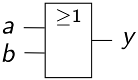
# Schaltzeichen




NICHT-Gatter

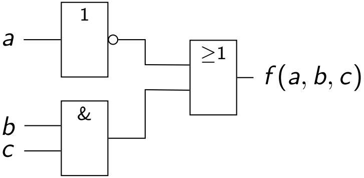



UND-Gatter

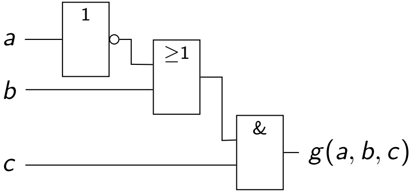



ODER-Gatter

$$f(a,b,c) = \overline{a} \vee b \wedge c = \overline{a} \vee (b \wedge c)$$




$$g(a,b,c) = (\overline{a} \vee b) \wedge c$$



# Gleichheit von Schaltfunktionen

## Definition

*Zwei Schaltfunktionen sind genau dann gleich, wenn sie bei derselben Belegung der Eingangsvariablen, dasselbe Ergebnis in Bezug auf die Ausgangsvariable $y$ haben.*

## Beispiel

$$f(a,b) = a \wedge b$$

| $a$ | $b$ | $a \wedge b$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$$g(a,b) = \overline{\overline{a} \vee \overline{b}}$$

| $a$ | $b$ | $\overline{a}$ | $\overline{b}$ | $\overline{a} \vee \overline{b}$ | $\overline{\overline{a} \vee \overline{b}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

# Gesetze der Schaltalgebra

Kommutativgesetze:

- $a \wedge b = b \wedge a$
- $a \vee b = b \vee a$

Distributivgesetze:

- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Absorptionsgesetze:

- $a \wedge (a \vee b) = a$
- $a \vee (a \wedge b) = a$

Reduktionsgesetze:

- $a \wedge 0 = 0$
- $a \vee 0 = a$
- $a \wedge 1 = a$
- $a \vee 1 = 1$

Resolutionsregeln:

- $(a \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b}) = a$
- $(a \vee b) \wedge (a \vee \overline{b}) = a$

De Morgan'sche Regeln:

- $\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$
- $\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$

## Beispiel

*z.Zg:*

$$\overline{\overline{a} \vee \overline{b}} = a \wedge b$$

$$\begin{aligned} g(a,b) &= \overline{\overline{a} \vee \overline{b}} \\ &= \overline{\overline{a}} \wedge \overline{\overline{b}} \\ &= a \wedge b \end{aligned}$$

*De Morgan'sche Regeln*

# Fragen?

?