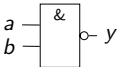
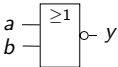


Digitaltechnik

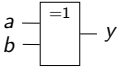
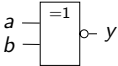
Vorsemesterkurs
Sommersemester 2021
Ronja Düffel

25. März 2021

Verknüpfungen $\bar{\wedge}$, $\bar{\vee}$

Operator	Name	Wahrheitstabelle	Schaltzeichen	Funktion															
$\bar{\wedge}$	NAND	<table border="1"> <thead> <tr> <th>a</th> <th>b</th> <th>$\overline{a \wedge b}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	a	b	$\overline{a \wedge b}$	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0		$y = f(a, b) = \overline{a \wedge b}$
a	b	$\overline{a \wedge b}$																	
0	0	1																	
0	1	1																	
1	0	1																	
1	1	0																	
$\bar{\vee}$	NOR	<table border="1"> <thead> <tr> <th>a</th> <th>b</th> <th>$\overline{a \vee b}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	a	b	$\overline{a \vee b}$	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0		$y = f(a, b) = \overline{a \vee b}$
a	b	$\overline{a \vee b}$																	
0	0	1																	
0	1	0																	
1	0	0																	
1	1	0																	

Verknüpfungen \oplus , $\overline{\oplus}$

Operator	Name	Wahrheitstabelle	Schaltzeichen	Funktion															
\oplus	XOR	<table border="1"> <thead> <tr> <th>a</th> <th>b</th> <th>$a \oplus b$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	a	b	$a \oplus b$	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0		$y = f(a, b) = a \oplus b$
a	b	$a \oplus b$																	
0	0	0																	
0	1	1																	
1	0	1																	
1	1	0																	
$\overline{\oplus}$	XNOR	<table border="1"> <thead> <tr> <th>a</th> <th>b</th> <th>$\overline{a \oplus b}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	a	b	$\overline{a \oplus b}$	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1		$y = \overline{f(a, b)} = \overline{a \oplus b}$
a	b	$\overline{a \oplus b}$																	
0	0	1																	
0	1	0																	
1	0	0																	
1	1	1																	

Vollständige Operatorensysteme

Definition (Operatorensystem)

Menge von Operatoren, die es erlauben, jede beliebige Schaltfunktion darzustellen.

Satz

Die Verknüpfungen $\bar{\wedge}$ und $\bar{\vee}$ bilden jeweils ein vollständiges Operatorensystem

Operatorensystem	Negation	Konjunktion	Disjunktion
$\wedge, \vee, \bar{}$	\bar{a}	$a \wedge b$	$a \vee b$
$\bar{\wedge}$	$a \bar{\wedge} a$	$(a \bar{\wedge} b) \bar{\wedge} (a \bar{\wedge} b)$	$(a \bar{\wedge} a) \bar{\wedge} (b \bar{\wedge} b)$
$\bar{\vee}$	$a \bar{\vee} a$	$(a \bar{\vee} a) \bar{\vee} (b \bar{\vee} b)$	$(a \bar{\vee} b) \bar{\vee} (a \bar{\vee} b)$

Minterme

Definition (Minterm)

Konjunktionsterm (\wedge -Verknüpfung), der alle Eingangsvariablen einer Schaltfunktion enthält.

Jeder Minterm hat nur bei einer einzigen Wertekombination der Eingangsvariablen den Wert 1.

a	b	$m_0 = \bar{a} \wedge \bar{b}$	$m_1 = \bar{a} \wedge b$	$m_2 = a \wedge \bar{b}$	$m_3 = a \wedge b$
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1

Merke: Eingangsvariablen mit UND verknüpfen und alle negieren, deren Wert 0 ist.

Maxterme

Definition (Maxterm)

Disjunktionsterm (\vee -Verknüpfung), der alle Eingangsvariablen einer Schaltfunktion enthält.

Jeder Maxterm hat nur bei einer einzigen Wertekombination der Eingangsvariablen den Wert 0.

a	b	$M_0 = a \vee b$	$M_1 = a \vee \bar{b}$	$M_2 = \bar{a} \vee b$	$M_3 = \bar{a} \vee \bar{b}$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Merke: Eingangsvariablen mit ODER verknüpfen und alle negieren, deren Wert 1 ist.

Min- und Maxterme

Indizes der Min- und Maxterme ergeben sich direkt aus der Belegung der Schaltvariablen, wenn man diese als Dualzahl auffasst.

a	b	Index	Minterm	Maxterm
0	0	0	$m_0 = \bar{a} \wedge \bar{b}$	$M_0 = a \vee b$
0	1	1	$m_1 = \bar{a} \wedge b$	$M_1 = a \vee \bar{b}$
1	0	2	$m_2 = a \wedge \bar{b}$	$M_2 = \bar{a} \vee b$
1	1	3	$m_3 = a \wedge b$	$M_3 = \bar{a} \vee \bar{b}$

Beispiel (Schaltfunktion durch Min- bzw. Maxterme darstellen)

$$f(a, b) = m_0 \vee m_2 = (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{b})$$

$$g(b, a) = m_0 \vee m_2 = (\bar{b} \wedge \bar{a}) \vee (b \wedge \bar{a})$$

Reihenfolge der Eingangsvariablen ist wichtig!!!

Normalformen

- standardisierte Darstellungsformen für Schaltfunktionen

Definition (Normalformen)

- DNF: *disjunktive Normalform, Ver-ODER-ung von UND-Termen*

$$g(a, b, c) = (a \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b) = ac \vee \bar{a}b$$

- KDNF: *kanonische disjunktive Normalform*

$$g(a, b, c) = (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee a\bar{b}c \vee abc$$

- KNF: *konjunktive Normalform, Ver-UND-ung von ODER-Termen*

$$g(a, b, c) = (\bar{a} \vee c) \wedge (a \vee b)$$

- KKNF: *kanonische konjunktive Normalform*

$$g(a, b, c) = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \bar{c}) \wedge (\bar{a} \vee b \vee c) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c)$$

Erstellen der DNF bzw. KNF

- durch Umformen der Schaltfunktion nach Gesetzen der Schaltalgebra.

Beispiel

$$\begin{aligned}
 g(a, b, c) &= (a \vee b) \wedge (\overline{a \wedge \overline{c}}) \vee (b \wedge c) && \text{De Morgan} \\
 &= (a \vee b) \wedge (\overline{a} \vee \overline{\overline{c}}) \vee (b \wedge c) \\
 &= (a \vee b) \wedge (\overline{a} \vee c) \vee (b \wedge c) \\
 &= ((a \vee b) \wedge \overline{a}) \vee (((a \vee b) \wedge c) \vee (b \wedge c)) && \text{Distributivgesetz} \\
 &= ((\overline{a} \wedge a) \vee (\overline{a} \wedge b)) \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \vee (b \wedge c) && \text{Distributivgesetz} \\
 &= 0 \vee (\overline{a} \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (b \wedge c) \\
 &= (\overline{a} \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (b \wedge c) && \text{Reduktion} \\
 &= (\overline{a} \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) && \text{Idempotenz}
 \end{aligned}$$

Erstellen der KNF

Beispiel

$$\begin{aligned}g(a, b, c) &= (a \vee b) \wedge (\overline{a \wedge \overline{c}}) \vee (b \wedge c) \\ &= (a \vee b) \wedge (\overline{a} \vee \overline{\overline{c}}) \vee (b \wedge c) && \text{De Morgan} \\ &= (a \vee b) \wedge (\overline{a} \vee c) \vee (b \wedge c) \\ &= (a \vee b) \wedge (\overline{a} \vee b \vee c) \wedge (\overline{a} \vee c \vee c) && \text{Distributivgesetz} \\ &= (a \vee b) \wedge (\overline{a} \vee b \vee c) \wedge (\overline{a} \vee c) && \text{Vereinfachen}\end{aligned}$$

Ablesen KDNF und KKNF

- KDNF enthält alle Minterme für die die Funktion den Wert 1 hat.
- KKNF enthält alle Maxterme für die die Funktion den Wert 0 hat.

Beispiel

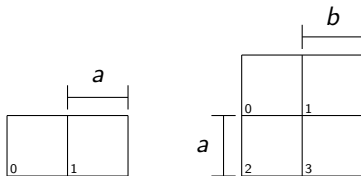
$$g(a, b, c) = (a \vee b) \wedge (\overline{a} \wedge \overline{c}) \vee (b \wedge c)$$

a	b	c	$g(a, b, c)$	Minterme	m_i	Maxterme	M_i
0	0	0	0	$\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}$	m_0	$a \vee b \vee c$	M_0
0	0	1	0	$\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge c$	m_1	$a \vee b \vee \overline{c}$	M_1
0	1	0	1	$\overline{a} \wedge b \wedge \overline{c}$	m_2	$a \vee \overline{b} \vee c$	M_2
0	1	1	1	$\overline{a} \wedge b \wedge c$	m_3	$a \vee \overline{b} \vee \overline{c}$	M_3
1	0	0	0	$a \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}$	m_4	$\overline{a} \vee b \vee c$	M_4
1	0	1	1	$a \wedge \overline{b} \wedge c$	m_5	$\overline{a} \vee b \vee \overline{c}$	M_5
1	1	0	0	$a \wedge b \wedge \overline{c}$	m_6	$\overline{a} \vee \overline{b} \vee c$	M_6
1	1	1	1	$a \wedge b \wedge c$	m_7	$\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c}$	M_7

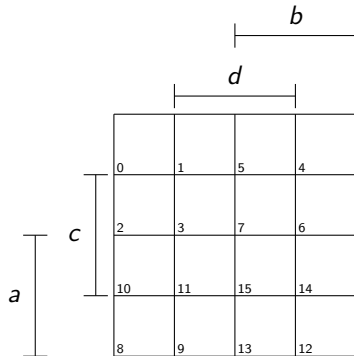
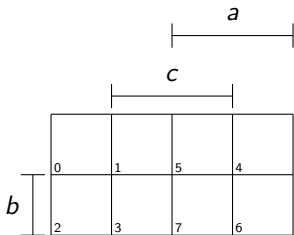
- KDNF: $(\overline{a} \wedge b \wedge \overline{c}) \vee (\overline{a} \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \overline{b} \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$
- KKNF: $(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \overline{c}) \wedge (\overline{a} \vee b \vee c) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b} \vee c)$

KV-Diagramme

- benannt nach Edward W. Veitch und Maurice Karnaugh
- graphische Darstellung einer Wahrheitstabelle



KV-Diagramme für 3- und 4-Eingangsvariablen



Beispiel KV-Diagramm (3-stellig)

$$h(a, b, c) = abc \vee \bar{a}b\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee ab\bar{c}$$

	a			
	c			
	0	1	5	4
b	0	0	1	0
	2	3	7	6
	1	0	1	1

Beispiel KV-Diagramm (4-stellig)

$$g(a, b, c, d) = abcd \vee \bar{a}\bar{b}cd \vee \bar{a}b\bar{c}\bar{d} \vee ab\bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}\bar{b}cd$$

The Karnaugh map is a 4x4 grid with the following values:

	b			
	d			
	0	1	5	4
	2	3	7	6
	10	11	15	14
	8	9	13	12
a	0	1	1	0
c	0	1	0	0
	0	0	1	0
	0	0	0	1

Fragen?

