Digitaltechnik

Vorsemesterkurs
Sommersemester 2021

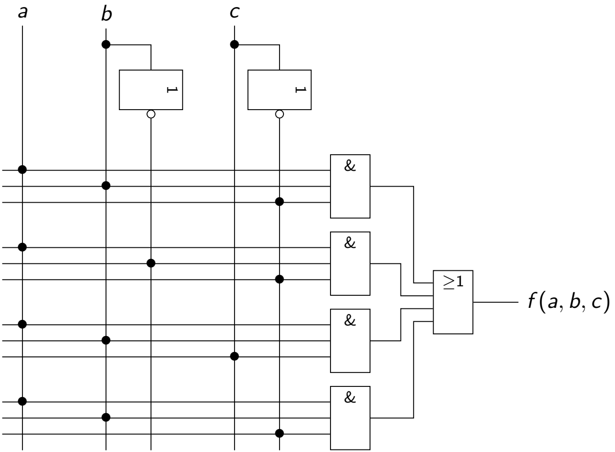
Ronja Düffel

26. März 2021

STARKER START ins Studium

Minimierung von Schaltfunktionen

$$f(a,b,c) = (a \wedge b \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \overline{c})$$



Minimierung von Schaltfunktionen

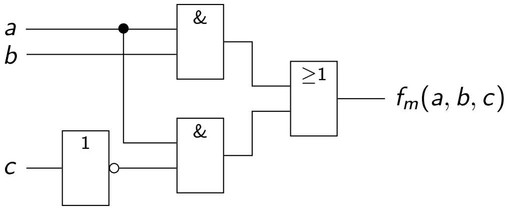
$$f(a,b,c) = (a \wedge b \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \overline{c})$$

Minimierung von Schaltfunktionen

$$
\begin{aligned}
f(a,b,c) &= (a \wedge b \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \overline{c}) \\
&= (a \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge b) = f_m(a,b,c)
\end{aligned}
$$

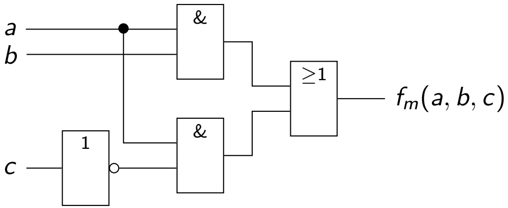
Minimierung von Schaltfunktionen

$$f(a,b,c) = (a \wedge b \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \overline{c})$$
$$= (a \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge b) = f_m(a,b,c)$$



Minimierung von Schaltfunktionen

$$f(a,b,c) = (a \wedge b \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \overline{c})$$
$$= (a \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge b) = f_m(a,b,c)$$



7 Gatter für $f(a,b,c)$ vs 4 Gatter für minimierte $f_m(a,b,c)$

Minimierung, Grundlagen

$(3+5) \cdot 2 = (3 \cdot 2) + (5 \cdot 2)$

$(2 \cdot 7) + (2 \cdot 5) =$

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c)$

- Resolutionsregeln:
  - $(a \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b}) = a$
  - $(a \vee b) \wedge (a \vee \overline{b}) = a$

  Beweis:

$$
\begin{aligned}
(a \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b}) &= a \wedge (b \vee \overline{b}) && \text{Distributivgesetz} \\
&= a \wedge 1 \\
&= a && \text{Reduktionsgesetz}
\end{aligned}
$$

Merksatz: Unterscheiden sich UND- und ODER-Terme nur in der Negation einer einzigen Variablen, können sie zu einem Term verschmolzen werden, bei dem diese Variable weggelassen wird.

Beispiel

$$f(a,b,c,d) = (a\bar{b}cd) \vee (abcd) \vee (ab\bar{c}d) \vee (\bar{a}bcd) \vee (\bar{a}b\bar{c}d)$$

$$= (acd) \vee (abd) \vee (\bar{a}bd) \vee (bcd)$$

$$= (acd) \vee (bd) \cancel{\vee (bcd)}$$

Minimierung mit KV-Diagrammen

$$f(a,b,c,d) = (a\overline{b}cd) \vee (abcd) \vee (ab\overline{c}d) \vee (\overline{a}bcd) \vee (\overline{a}b\overline{c}d)$$

Minimierung mit KV-Diagrammen

$$f(a,b,c,d) = (a\bar{b}cd) \vee (abcd) \vee (abc\bar{d}) \vee (\bar{a}bcd) \vee (\bar{a}b\bar{c}d)$$

$f(a,b,c,\underline{d})$:

			d	d, b	b
		0	0	1	0
c		0	0	1	0
c	a	0	1	1	0
	a	0	0	1	0

~~$g(a,b,c,d) = bd \vee \bar{a}bcd$ u.i.e.c.~~

$(b\,d)$

$(\bar{a}\,b\,d)$

$(a\,c\,d)$

$(a\,b\,d)$

Implikant und Primimplikant

Definition (Implikant)

Ein Konjunktionsterm $(\wedge)$ *m einer Bool'schen Funktion f heißt Implikant, wenn er Teil der Funktion f ist. D.h. wenn* $m(a, b, \ldots) = 1$*, dann* $f(a, b, \ldots) = 1$*.*

Implikant und Primimplikant

Definition (Implikant)

Ein Konjunktionsterm ($\wedge$) m einer Bool'schen Funktion f heißt Implikant, wenn er Teil der Funktion f ist. D.h. wenn $m(a, b, \dots) = 1$, dann $f(a, b, \dots) = 1$.
Kleinster Implikant einer Funktion f ist ein Minterm, der in der KDNF vorkommt (1-Feld im KV-Diagramm).

Implikant und Primimplikant

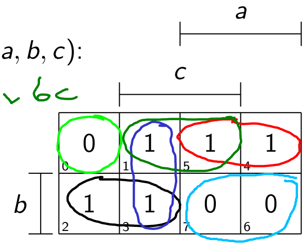
Definition (Implikant)

Ein Konjunktionsterm ($\wedge$) m einer Bool'schen Funktion f heißt Implikant, wenn er Teil der Funktion f ist. D.h. wenn $m(a, b, \dots) = 1$, dann $f(a, b, \dots) = 1$.
Kleinster Implikant einer Funktion f ist ein Minterm, der in der KDNF vorkommt (1-Feld im KV-Diagramm).

Ein Implikant m von f heißt Primimplikant, wenn er nicht weiter verkürzt werden kann (maximaler Block von 1-en im KV-Diagramm).

$g(a,b,c) = \bar{a}b \vee a\bar{b} \vee bc$

$g(a, b, c)$:



KNF:
$g(a,b,c) = (\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (a \vee b \vee c)$

$\bar{a}b$
$\bar{a}c$
$a\bar{b}$
$\bar{b}c$

$a \vee b \vee c$

$\bar{a} \vee \bar{b}$

Noch ein Beispiel

$$f(a,b,c,d) = \bar{b}\bar{c}\bar{d} \vee \bar{b}cd \vee ab \vee ad$$

$f(a,b,c,d)$

		d	d, b	b
	1 (0)	0 (1)	0 (5)	0 (4)
c	0 (2)	1 (3)	0 (7)	0 (6)
c, a	0 (10)	1 (11)	1 (15)	1 (14)
a	1 (8)	1 (9)	1 (13)	1 (12)

$\bar{b}\bar{c}\bar{d}$ – Kernp.

$\bar{b}cd$ – Kernp.

ad – relativ elem.

ab – Kernp.

$a\bar{c}$ – relativ elem.

Primimplikanten

Kernprimimplikant: Primimplikant, der eine 1 enthält, die von keinem anderen Primimplikanten überdeckt wird.

Primimplikanten

Kernprimimplikant: Primimplikant, der eine 1 enthält, die von keinem anderen Primimplikanten überdeckt wird.

absolut eleminierbarer Primimplikant: Primimplikant, der komplett durch Kernprimimplikanten abgedeckt wird.

Primimplikanten

Kernprimimplikant: Primimplikant, der eine 1 enthält, die von keinem anderen Primimplikanten überdeckt wird.

absolut eleminierbarer Primimplikant: Primimplikant, der komplett durch Kernprimimplikanten abgedeckt wird.

relativ eleminierbarer Primimplikant: Primimplikanten, die weder Kern- noch absolut eleminierbare Primimplinkanten sind.

Minimale DNF aus KV-Diagramm

$h(a, b, c, d)$:

b

d

c

a

1 0	1 1	1 5	1 4
0 2	0 3	0 7	0 6
1 10	1 11	1 15	0 14
0 8	0 9	1 13	0 12

Minimale DNF aus KV-Diagramm

1. Primimplikanten bestimmen

$h(a, b, c, d)$:

$h(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee abd$

1 (0)	1 (1)	1 (5)	1 (4)
0 (2)	0 (3)	0 (7)	0 (6)
1 (10)	1 (11)	1 (15)	0 (14)
0 (8)	0 (9)	1 (13)	0 (12)

re $b\bar{c}d$

kp $\bar{a}\bar{c}$

re acd

re abd

kp $a\bar{b}c$

Minimale ~~DNF~~ KNF aus KV-Diagramm

1. Primimplik~~a~~nten bestimmen
2. Minimale Überdeckung der ~~1~~ 0-en suchen

$h(a, b, c, d)$:

$h(a,b,c,d) = (a \vee \bar{c}) \wedge (\bar{a} \vee b \vee c)$
$\wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee d)$

b (columns 5, 4), d (columns 1, 5), c (rows 2, 10), a (rows 10, 8)

1 (0)	1 (1)	1 (5)	1 (4)
0 (2)	0 (3)	0 (7)	0 (6)
1 (10)	1 (11)	1 (15)	0 (14)
0 (8)	0 (9)	1 (13)	0 (12)

$(\bar{a} \vee c \vee d)$ – re
$(\bar{b} \vee \bar{c} \vee d)$ – re
$(\bar{a} \vee b \vee d)$ – re
$(\bar{a} \vee b \vee c)$ – Kp
$(a \vee \bar{c})$ – Kp

Unvollständig definierte Funktionen

Unvollständig definierte Funktionen

- don't care, gekennzeichnet durch d oder $-$

Unvollständig definierte Funktionen

- don't care, gekennzeichnet durch *d* oder $-$
- kann, aber muss nicht abgedeckt werden

Unvollständig definierte Funktionen

- don't care, gekennzeichnet durch d oder $-$
- kann, aber muss nicht abgedeckt werden

$f(a,b,c)$:

$f(a,b,c) = c \vee \bar{a}\, b$

		c	a, c	a
	0 (0)	1 (1)	- (5)	- (4)
b	1 (2)	- (3)	1 (7)	0 (6)

Schaltungsentwurf

Schaltungsentwurf

1. Problemanalyse und Aufstellung einer Wahrheitstabelle

Schaltungsentwurf

1. Problemanalyse und Aufstellung einer Wahrheitstabelle
2. Minimierung der Funktion

Schaltungsentwurf

1. Problemanalyse und Aufstellung einer Wahrheitstabelle
2. Minimierung der Funktion
3. Implementierung der Schaltung

Beispiel

Ziel: Schaltung $P(x_2, x_1, x_0) = 1$ genau dann, wenn die Eingangsbelegung ein Palindrom ist.

Beispiel

Ziel: Schaltung $P(x_2, x_1, x_0) = 1$ genau dann, wenn die Eingangsbelegung ein Palindrom ist.

x_2	x_1	x_0	$P(x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Beispiel

Ziel: Schaltung $P(x_2, x_1, x_0) = 1$ genau dann, wenn die Eingangsbelegung ein Palindrom ist.

x_2	x_1	x_0	$P(x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	1
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Beispiel

Ziel: Schaltung $P(x_2, x_1, x_0) = 1$ genau dann, wenn die Eingangsbelegung ein Palindrom ist.

x_2	x_1	x_0	$P(x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Beispiel

Ziel: Schaltung $P(x_2, x_1, x_0) = 1$ genau dann, wenn die Eingangsbelegung ein Palindrom ist.

x_2	x_1	x_0	$P(x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Beispiel

Ziel: Schaltung $P(x_2, x_1, x_0) = 1$ genau dann, wenn die Eingangsbelegung ein Palindrom ist.

x_2	x_1	x_0	$P(x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Beispiel

Ziel: Schaltung $P(x_2, x_1, x_0) = 1$ genau dann, wenn die Eingangsbelegung ein Palindrom ist.

x_2	x_1	x_0	$P(x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Beispiel

Ziel: Schaltung $P(x_2, x_1, x_0) = 1$ genau dann, wenn die Eingangsbelegung ein Palindrom ist.

x_2	x_1	x_0	$P(x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	
1	1	1	

Beispiel

Ziel: Schaltung $P(x_2, x_1, x_0) = 1$ genau dann, wenn die Eingangsbelegung ein Palindrom ist.

x_2	x_1	x_0	$P(x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	

Beispiel

Ziel: Schaltung $P(x_2, x_1, x_0) = 1$ genau dann, wenn die Eingangsbelegung ein Palindrom ist.

x_2	x_1	x_0	$P(x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Beispiel

Ziel: Schaltung $P(x_2, x_1, x_0) = 1$ genau dann, wenn die Eingangsbelegung ein Palindrom ist.

x_2	x_1	x_0	$P(x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$P(x_2, x_1, x_0)$:

			x_2	x_2
		x_0	x_0	
	1 (0)	0 (1)	1 (5)	0 (4)
x_1	1 (2)	0 (3)	1 (7)	0 (6)

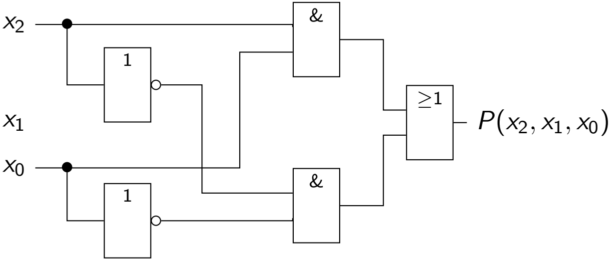
$$P(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_2}\,\overline{x_0} \vee x_2 x_0$$

Schaltung: Palindrom

$$P(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_2}\,\overline{x_0} \vee x_2 x_0$$

Schaltung: Palindrom

$$P(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_2}\,\overline{x_0} \vee x_2 x_0$$



Fragen?

?