Tag 5a - Induktion und Rekursion

Aufgabe 1: Summen und Produkte

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke ausführlich hin.

a) $\Sigma_{k=1}^{5} k^2$
b) $\Sigma_{k=1}^{9} 2$
c) $\Sigma_{i=1}^{6} \frac{1}{i}$
d) $\Pi_{k=1}^{9} 2$
e) $\Pi_{k=1}^{5} k^2$
f) $\Sigma_{i=1}^{3} \Pi_{k=1}^{4} ik$
g) $\Pi_{i=1}^{3} \Sigma_{k=1}^{4} ik$
h) $\Sigma_{i=1}^{5} \Sigma_{k=1}^{4} 1$
i) Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, gegeben durch $f(n) = (1 - 2n)$.
Berechne $\Sigma_{i=1}^{6} f(i)$. Was ist $\Sigma_{i=1}^{n} f(i)$?

Aufgabe 2: Rekursion

Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei gegeben durch die Vorschrift

$$f(n) := \begin{cases} 3, & \text{falls } n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bereche $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ und $f(4)$.

Aufgabe 3: Ungerade Zahlen

Summiert man die ersten ungeraden Zahlen, so erhält man *anscheinend* stets eine Quadratzahl:

$$\begin{array}{rcrcl} 1 & = & 1 & = & 1^2 \\ 3+1 & = & 4 & = & 2^2 \\ 5+3+1 & = & 9 & = & 3^2 \\ 7+5+3+1 & = & 16 & = & 4^2 \\ 9+7+5+3+1 & = & 25 & = & 5^2 \end{array}$$

Diesen Umstand sollen Sie in allgemeiner Form beweisen (s.u.). Hierzu ein paar Erläuterungen:
Eine *gerade* Zahl lässt sich in der Form $2 \cdot n$ schreiben mit $n \in \mathbb{N}$.
Eine *ungerade* Zahl lässt sich in der Form $2 \cdot n + 1$ schreiben mit $n \in \mathbb{N}$.
In den obigen fünf Summen gilt: Ist der letzte Summand die Zahl $2n + 1$, so ist der Wert der Summe$(n + 1)^2$. In der letzten Beispielzeile wird bis $9 = 2 \cdot 4 + 1$ summiert und die Summe ergibt $(4 + 1)^2 = 5^2$.

Achtung: Dies alles ist nur eine Erläuterung der zu beweisenden Formel. Wir haben noch keinen Beweis für die allgemeine Formel geführt!

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} (2i + 1) = (n + 1)^2$$

.

Aufgabe 4: Induktive Argumentation

Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Beweisen Sie durch induktive Argumentation folgende Aussage:
n Elemente lassen sich auf $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ Arten anordnen.

Aufgabe 5: Vollständige Induktion

Zeige die folgenden Aussage per Induktion für alle natürlichen Zahlen n: $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

Aufgabe 6: Rekursion und die Induktion

Betrachte die Menge

$$M_1 = \{n \in \mathbb{N} | n \geq 9, \text{ es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ s.d. } n = 3 \cdot k\}$$

(a) Beschreibe die Menge umgangsprachlich

(b) Notiere die 5 kleinsten Elemente der Menge M_1

(c) Definiere die Menge M_1 rekursiv.

(d) Entwickle eine Beweistechnik, die mittels Induktion eine Aussage über M_1 beweist.

Aufgabe 7: Rekursive Definition

Gib eine rekursive Funktion

(a) sum: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die die Summe der Zahlen 0 bis n berechnet.

(b) fib: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die die Fibonacci-Zahlen berechnet. Die Fibonacci-Zahlen ist eine Folge von Zahlen, wobei die ersten beiden Zahlen 0 und 1 sind und die nachfolgende Zahl immer die Summe der beiden vorangegangenen Zahlen ist. Die Folge lautet also: $0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots$

Viel Erfolg!