Induktion und Rekursion

Vorkurs Informatik
Theoretischer Teil
WS 2014/15

07. Oktober 2014

Vollständige Induktion

Vollständige Induktion

Ziel

Ziel

beweise, dass eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel

Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Der kleine Gauß

Der kleine Gauß

- **Aufgabe:** addiert die ersten 100 Zahlen zusammen

  berechnet $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$

- **Vermutung:** Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- **Beweis** durch vollständige Induktion

Summen und Produkte

Definition (Summen und Produkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ beliebige Zahlen. Dann ist:

- $\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

  insbesondere ist die leere Summe: $\sum_{i=1}^{0} a_i = 0$.
- $\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \dots a_n$

  insbesondere ist das leere Produkt: $\prod_{i=1}^{0} a_i = 1$.

Induktionsprinzip

Schließe vom Besonderen auf das Allgemeine.

1. **Induktionsanfang:** Zeige, dass A für ein, oder einige kleine Werte von n gilt.
2. **Induktionsschritt:** zeige, dass für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: falls $A(n)$ gilt, dann gilt auch $A(n+1)$.
   Vorgehen: **Nimm an**, dass die Aussage für n gilt,
   zeige, dass daraus folgt, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt.

Verwendung der Induktionsannahme!

Insbesondere gilt dann

- $A(1)$, wenn $A(0)$ wahr ist,

damit gilt aber auch

- $A(2)$, da $A(1)$ gilt,
- $A(3)$, da $A(2)$ gilt, usw.

Domino-Effekt

kleiner Gauß

Satz (kleiner Gauß)

$A(n)$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang: $A(1)$

Behauptung: Der Satz gilt für $n = 1$.

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

kleiner Gauß

Satz (kleiner Gauß)

$A(n)$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsschritt: $A(n) \to A(n+1)$

Induktionsvoraussetzung: Es gilt $A(n)$, also $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsbehauptung: Es gilt $A(n+1)$, also

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

kleiner Gauß

zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} &= 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) \\
&= (\sum_{i=1}^{n} i) + (n+1) && \text{Induktionsvoraussetzung anwenden} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \text{erweitern} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} && (n+1) \text{ ausklammern} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}
\end{aligned}$$

Warum geht das?

1. Wir haben die Behauptung für ein spezielles n direkt bewiesen
2. Wir haben gezeigt:

   Wenn die Behauptung für ein **beliebiges** n gilt,

   dann gilt sie auch für den Nachfolger $n + 1$.

Damit kann dann für **alle** n argumentiert werden.

Wahrheitstabelle

Satz

Die Wahrheitstabelle für eine aussagenlogische Formel mit insgesamt n Variablen hat genau 2^n Zeilen.

Kartesisches Produkt

Satz (Mächtigkeit des kartesischen Produkts)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ Mengen. Dann gilt

$$|M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ldots \cdot |M_n|.$$

Was kann schiefgehen? (1/4)

Beispiel

Kein Induktionsanfang:

$$A(\textit{5 ist durch 2 teilbar}) \rightarrow B(\textit{7 ist durch 2 teilbar})$$

- *logisch korrekte Schlussfolgerung*
- *Aussage ist trotzdem falsch, da Voraussetzung nicht gegeben ist.*

Was kann schiefgehen? (2/4)

Beispiel

Behauptung: *In einen Koffer passen unendlich viele Socken.*
Induktionsanfang: $n = 1$*: Klar, in einen leeren Koffer passt ein Paar Socken.*
Induktionsschritt: $n \to n + 1$
Induktionsvoraussetzung: n *Paar Socken passen in den Koffer.*
Induktionsbehauptung: $n + 1$ *Paar Socken passen in den Koffer.*
Beweis: n *Paar Socken befinden sich im Koffer. Aus Erfahrung weiß man, ein Paar Socken passt immer noch rein.*
$\Rightarrow$ $n + 1$ *Paar Socken passen in den Koffer.*
$\Rightarrow$ *Unendlich viele Socken passen in den Koffer.* **???**

Konstruktives Argument hätte sagen müssen, wo genau die Lücke für das extra Paar Socken ist.

Was kann schiefgehen? (3/4)

Beispiel

Behauptung: *Alle Menschen einer Menge M mit $|M| = n$ sind gleich groß.*
Induktionsanfang: $n = 1$: *In einer Menge M, in der sich nur ein Mensch befindet, sind alle Menschen gleich groß.*

Was kann schiefgehen? (4/4)

Beispiel

Induktionsschritt: $n \to n+1$
Induktionsvoraussetzung: *Alle Menschen einer Menge* M *mit* $|M| = n$ *sind gleich groß.*
Behauptung: *Alle Menschen einer Menge* M *mit* $|M| = n+1$ *sind gleich groß.*
Beweis: *Sei* $M = \{m_1, \ldots, m_{n+1}\}, M' = \{m_1, \ldots, m_n\}$ *und* $M'' = \{m_2, \ldots, m_{n+1}\}$.
$|M'| = |M''| = n \Rightarrow$ *Gemäß Induktionsvoraussetzung sind die Menschen in* M' *und* M'' *jeweils gleich groß.*
$m_2 \in M'$ *und* $m_2 \in M'' \Rightarrow$ *Alle Menschen in* M' *und* M'' *gleich groß.*
$M = M' \cup M'' \Rightarrow$ *Alle Menschen in* M *sind gleich groß.* **???**

Induktionsschritt scheitert bei $n = 1$, da $M' = \{m_1\}$ und $M'' = \{m_2\}$.

Wann anwendbar?

- Beweis von Aussagen, die sich auf Objekte beziehen, die als natürliche Zahlen betrachtet werden können.
- $A(n+1)$ muss sich aus $A(n)$ folgern lassen.
- Aussagen über rekursiv definierte Mengen oder Funktionen.

Rekursion

Rekursion

Definition

Eine rekursive Funktion ist eine Funktion, die durch sich selbst definiert wird.
Rekursionsanfang: Fall (Fälle), für den die Funktion nicht wieder selbst aufgerufen wird.
Rekursionsschritt: Rekursiver Aufruf der Funktion.

Beispiel (Fakultätsfunktion)

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \quad \text{(Rekursionsanfang)} \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst} \quad \text{(Rekursionsschritt)} \end{cases}$$

Fakultätsfunktion (1/3)

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \quad \text{(Rekursionsanfang)} \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst} \quad \text{(Rekursionsschritt)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(1) &= 1 \cdot f(0) = 1 \cdot 1 = 1 \\ f(2) &= 2 \cdot f(1) = 2 \cdot 1 = 2 \\ f(3) &= 3 \cdot f(2) = 3 \cdot (2 \cdot 1) = 6 \end{aligned}$$

Man schreibt auch $f(n) = n!$.

Fakultätsfunktion (2/3)

Satz

Für die Fakultätsfunktion $f(n)$ gilt: $f(n) = \prod_{i=1}^{n} i$.

Beweis: durch Induktion nach n

Induktionsanfang: $n = 0$

Behauptung: Der Satz gilt für $n = 0$.

Beweis: Es gilt: $f(0) = 1$. Ferner gilt: $\prod_{i=1}^{0} i = 1$.
Somit gilt: $f(0) = 1 = \prod_{i=1}^{0} i$.

Induktionsschritt: $n \to n + 1$

Induktionsvoraussetzung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f(n) = \prod_{i=1}^{n} i$.

Induktionsbehauptung: Es gilt: $f(n+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i$.

Fakultätsfunktion (3/3)

Induktionsbehauptung: Es gilt: $f(n+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i$.

Beweis:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= (n+1) \cdot f(n) \qquad \text{Induktionsvoraussetzung anwenden:} \\ &= (n+1) \cdot \prod_{i=1}^{n} i \\ &= (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \\ &= \prod_{i=1}^{n+1} i \end{aligned}$$

$\square$

Sind wir fertig?

1. Wir haben die Behauptung für $n = 0$ gezeigt.

2. Wir haben gezeigt:

   Wenn die Behauptung für n gilt, **dann** gilt sie auch für $n + 1$.

   wichtig: Verwendung der Induktionsvoraussetzung

Türme von Hanoi

Regeln:

- nur eine Scheibe bewegen
- niemals eine größere auf eine kleinere Scheibe legen.

Algorithmus Türme von Hanoi

Algorithmus

```
function hanoi(n, start, ziel, hilf){
    if (n > 1){
        hanoi(n-1,start,hilf,ziel)
    }
    verschiebe Scheibe n von start auf ziel
    if (n > 1){
        hanoi(n-1,hilf,ziel,start)
    }
}
```

Anzahl der Spielzüge

$n = 1$	Schiebe 1 von A nach B	1 Zug
$n = 2$	$1 \curvearrowright$ C, $2 \curvearrowright$ B, $1 \curvearrowright$ B	3 Züge
$n = 3$	$1 \curvearrowright$ B, $2 \curvearrowright$ C ,$1 \curvearrowright$ C, $3 \curvearrowright$ B, $1 \curvearrowright$ A, $2 \curvearrowright$ B, $1 \curvearrowright$ B	7 Züge

Satz

Um n Scheiben von einem Stapel zu einem anderen zu transportieren, werden mindestens $2^n - 1$ Spielzüge benötigt.

Beweis Anzahl der Spielzüge

Induktionsanfang: $n = 1$

Behauptung: Um eine Scheibe von A nach B zu setzen, werden $2^1 - 1 = 1$ Spielzüge benötigt.

Beweis: offensichtlich korrekt, wir setzen die Scheibe von A nach B.

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Induktionsvoraussetzung: Um n Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^n - 1$ Spielzüge benötigt.

Induktionsbehauptung: Um $n + 1$ Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^{n+1} - 1$ Spielzüge benötigt.

Induktionsbehauptung: Um $n+1$ Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^{n+1}-1$ Spielzüge benötigt.

Beweis:

1. transportiere n Scheiben von start auf hilf
2. transportiere Scheibe $n+1$ von start auf ziel
3. transportiere n Scheiben von hilf auf ziel

$$2^n - 1 + 1 + 2^n - 1 = 2^n + 2^n - 1 + 1 - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$