



Tag 1b - Aussagenlogik und Mengen

Aufgabe 1: Logische Negation

Gib zu den folgenden Aussagen jeweils die Gegenaussage (Negation) an. Tipp: überlege dir zuerst, welche Aussageteile „immer“ (d.h. „für alle“), und welche „manchmal“ (d.h. „es existiert“) gelten.

- Wenn es regnet, ist die Straße nass.
- Es gibt kein Tier, das genau ein Ohr und genau zwei Augen hat.
- Alle Quadrate von ganzen Zahlen sind gerade.
- Für jeden Vorschlag gibt es jemanden, der ihn kritisiert.
- Keine Regel ohne Ausnahme.
- In manchen Häusern gibt es nicht in jeder Wohnung fließendes Wasser.

Aufgabe 2: Aussagenlogik: Formalisierung

Übersetze die folgenden Aussagen in Implikationen, indem du geeignete Abkürzungen wie etwa M für Mathematiker verwendest.

- Gemütliche Menschen stehen erst nach 9:00 Uhr auf.
- Wer nicht gemütlich ist, ist hektisch.
- Wer nicht ruhig ist, kann kein Mathematiker sein.
- Wer hektisch ist, ist nicht ruhig.

Prüfe, ob sich aus den obigen Aussagen die Aussage „Mathematiker stehen erst nach 9:00 Uhr auf“ folgern lässt.

Aufgabe 3: Aussagenlogische Umformung

schwierig

- Stelle die Bimplikation (auch: Äquivalenz) „ \leftrightarrow “ durch eine Kombination der Verknüpfungen „ \rightarrow “, „ \wedge “ dar.
- Stelle die Implikation „ \rightarrow “ durch eine Kombination der Verknüpfungen „ \neg “, „ \vee “ dar.
- Zeige, dass sich die Verknüpfung „ \wedge “ durch eine Kombination der Verknüpfungen „ \neg “, „ \vee “ darstellen lässt, dass also Disjunktion und Negation ausreichend sind, um die komplette Semantik der Aussagenlogik abzubilden.
- Zeige, dass sich die Verknüpfung „ \vee “ durch eine Kombination der Verknüpfungen „ \neg “, „ \wedge “ darstellen lässt, dass also Konjunktion und Negation ausreichend sind, um die komplette Semantik der Aussagenlogik abzubilden.

Aufgabe 4: De Morgan'sche Gesetze

Zeige durch Umformen, dass folgende Äquivalenzen gelten:

- Absorptionsgesetze**
 - $(A \vee (A \wedge B)) \equiv A$
 - $(A \wedge (A \vee B)) \equiv A$
- De Morgan'sche Gesetze**
 - $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$
 - $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$

Aufgabe 5: Mengendarstellung

Definition:

Es sei $\bigcup_{i=1}^n A_i$ die Vereinigung der Mengen A_1, A_2, \dots, A_n ; also eine Kurzschreibweise für $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

Es sei $\bigcap_{i=1}^n A_i$ der Schnitt der Mengen A_1, A_2, \dots, A_n ; also eine Kurzschreibweise für $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$.

- (a) Beschreibe folgende Mengen umgangssprachlich
- (i) $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, \text{ es ex. } k \in \mathbb{Z}, x = 3 \cdot k\}$
 - (ii) $\{x^3 \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 > 3\}$
 - (iii) $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, 3x + 2 < 1\}$
 - (iv) $\{(x, y) \mid x, y \text{ sind Menschen}, x \neq y, \text{ Eltern von } x = \text{Eltern von } y\}$
- (b) Die Mengen $A_1 := \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 := \{2, 4, 5\}$, $A_3 := \{3, 4, 5, 6\}$ und $A_4 := \{4, 5, 6, 7\}$ sind gegeben. Beschreibe die folgenden Mengen in extensionaler Form.
- (i) $\bigcup_{i=1}^3 A_i$
 - (ii) $\bigcap_{j=1}^4 A_j$
 - (iii) $\bigcup_{k=2}^4 (A_k \setminus A_{k-1})$

Viel Erfolg!