Tag 3a - Relationen und Funktionen mathematische Beweise

Aufgabe 1: Funktionen: Definitions- und Bildbereich

Zeichne den Graphen zu

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) := x^2$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2$

(c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2$

Aufgabe 2: Kartesisches Produkt

Es gibt drei Wege von Sparta nach Korinth und fünf Wege von Korinth nach Athen. Sei X die Menge der Wege von Sparta nach Korinth und Y die Menge der Wege von Korinth nach Athen. Alle Wege von Sparta nach Athen führen über Korinth.

(a) Was beschreibt $X \times Y$?

(b) Was beschreibt $|X \times Y|$?

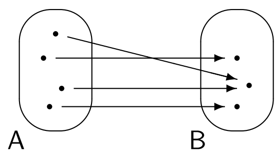
(c) Zeichungen und graphische Darstellungen sind oft hilfreich, um Ideen zu bekommen, und auch um sich Regeln zu merken.
Entwirf eine graphische Darstellung aller Wege von Sparta nach Athen!

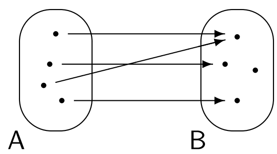
Aufgabe 3: Injektiv, surjektiv, bijektiv

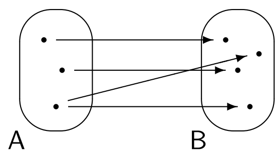
Eine Funktion ist gegeben duch einen Definitionsbereich A, einen Bildbereich B und eine Vorschrift, die jedem Element von A in eindeutiger Weise ein Element von B zuordnet.

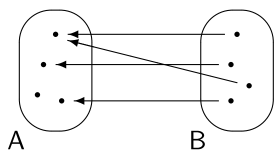
(a) Weißt du es schon auswendig: Wann heißt eine Funktion $f : A \to B$ von A nach B injektiv/-surjektiv/bijektiv?

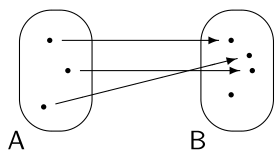
(b) Interpretiere folgende Bilder als Relationen und beschreibe sie mit Begriffen aus den Vorlesungen.
Handelt es sich um eine Funktion? Wenn ja, ist es eine surjektive Funktion? Ist sie injektiv? Ist sie bijektiv?

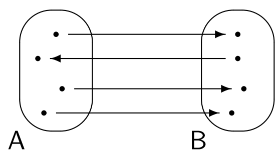
(i)


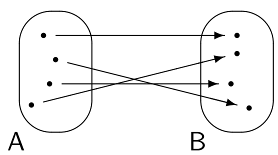
(ii)


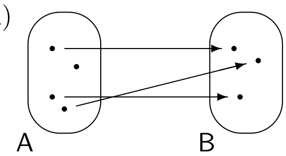
(iii)


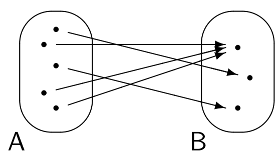
(iv)


(v)


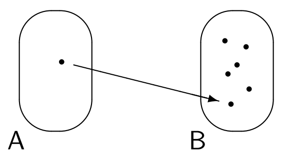
(vi)


(vii)


(viii)


(ix)


(x)



Aufgabe 4: Zuordnungsvorschriften

Stelle fest, ob die folgenden Vorschriften Zuordnungsvorschriften von Funktionen sind, und prüfe ggf., ob die Funktionen injektiv sind:

(a) Jedem Einwohner Münchens wird sein Nachname zugeordnet.

(b) Jedem Einwohner der Bundesrepublik Deutschland, der einen rechten Daumen besitzt, wird der Fingerabdruck desselben zugeordnet.

(c) Jedem Patienten eines Krankenhauses wird seine Größe oder sein Gewicht zugeordnet.

(d) Jedem angemeldeten PKW in der Bundesrepublik Deutschland wird sein KfZ-Kennzeichen zugeordnet.

(e) Jedem $x \in [-1, 1]$ wird eine Lösung der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ zugeordnet.

Aufgabe 5: Direkter Beweis

Betrachte den folgenden Satz

Satz 1 *Wenn eine Zahl durch 42 teilbar ist, dann ist sie auch durch 14 teilbar.*

(a) Wie lauten die Voraussetzung V und die Folgerung F?

(b) Nenne alle Zahlen zwischen -100 und 100, die durch 42 oder durch 14 teilbar sind.

(c) Welche Beobachtung triffst du in Aufgabeteil (b)?

(d) Welche der folgenden Zahlen sind durch 42 teilbar? Verifiziere deine Antwort, indem du eine ganze Zahl k findest, sodass $a = 42 \cdot k$.

$$33 \quad 84 \quad 462 \quad 540 \quad -728$$

(e) Welche der folgenden Zahlen sind durch 14 teilbar? Verifiziere deine Antwort, indem du eine ganze Zahl k findest, sodass $a = 14 \cdot k$.

$$33 \quad 84 \quad 462 \quad 540 \quad -728$$

(f) Sei a eine Zahl, die durch 42 teilbar ist. Welche Form hat die Zahl nach der Definition der Teilbarkeit?

(g) Sei a eine Zahl, die durch 14 teilbar ist. Welche Form hat die Zahl nach der Definition der Teilbarkeit?

(h) Gebe atomare Aussagen an, sodass die Implikationsfolge $V \Rightarrow a_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow a_n \Rightarrow F$ erfüllt ist?

(i) Gebe für jeden Zwischenschritt in deiner obigen Implikationsfolge eine Begründung an.

(j) Beweise den obigen Satz, d.h. zeige, dass jede Zahl, die durch 42 teilbar ist auch durch 14 teilbar ist.

(k) Zeige, dass die folgende Aussage gilt: "0 ist durch 15 teilbar"

Aufgabe 6: Widerspruch und Logik

Wir haben in der Vorlesung den *Beweis durch Widerspruch* kennengelernt, allerdings nicht gezeigt, dass dieser für "Wenn ... dann ..." Aussagen gültig ist. Dies möchten wir nun nachholen. Wir wissen: Wir nehmen die Voraussetzung p und die Folgerung q und nehmen an, dass die Voraussetzung wahr ist und die Folgerung falsch (aussagenlogisch: $p \wedge \neg q$). Wir führen diese Behauptung dann in eine Aussage die falsch ist, also: $((p \wedge \neg q) \to 0)$. Es ist zu zeigen:

$$(p \to q) \equiv ((p \wedge \neg q) \to 0)$$

Aufgabe 7: Kontraposition

Sei $a \in \mathbb{Z}$.

Beweise: *Wenn a^{32} eine ungerade Zahl ist, dann ist a^4 ebenfalls eine ungerade Zahl.*

(a) Wie lautet die Voraussetzung p und die Folgerung q?

(b) Wie lauten die Negation von p und q?

(c) Welche Form hat eine Zahl, die gerade ist?

(d) Finde Zwischenaussagen, sodass die Implikationsreihenfolge $\neg q \Rightarrow a_1 \cdots a_n \Rightarrow \neg p$ gilt.

(e) Begründe die Schritte, die jeweils zur nächsten Zwischenaussage führen.

(f) Beweise den obigen Satz.

Aufgabe 8: Überprüfen von Aussagen

Beweise oder wiederlege (d.h. gebe ein Beispiel an, das zeigt, dass die Aussage nicht stimmen kann):

(a) Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist und eine weitere Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist deren Summe durch 7 teilbar

(b) Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist und eine weitere Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist deren Produkt durch 7 teilbar.

(c) Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, dann ist dessen Quadrat ebenfalls durch 3 teilbar

Viel Erfolg!