Vorsemesterkurs Informatik

Mario Holldack
WS2015/16

2. Oktober 2015

Inhalt

Wiederholung

Mengen

- Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen (vgl. Cantor)
- $\{1, 3, 2\} = \{2, 1, 3\}$
- $\{1, 2, 4, 4\} = \{1, 2, 4\}$,
  also auch $|\{1, 2, 4, 4\}| = 3$ (Mächtigkeit, Kardinalität)

Problem: Mengen erlauben uns **nicht**

- Reihenfolge festzulegen
- mehrfaches Vorkommen zu beschreiben

Inhalt

Tupel

Definition (Tupel)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

1. Für n Objekte $a_1, \ldots, a_n$ bezeichnet $(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ das **Tupel** mit Komponenten $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n$.
2. a_i ist die i-**te Komponente** und die Zahl n heißt **Länge** des Tupels.
3. Tupel der Länge 2 nennen wir auch **geordnete Paare**, Tupel der Länge 3 **Tripel**, Tupel der Länge n kurz n-**Tupel**.
4. Zwei Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_m)$ sind **gleich**, falls $m = n$ ist und für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $a_i = b_i$.

Frage 17: Welche der folgenden Gleichungen ist falsch?

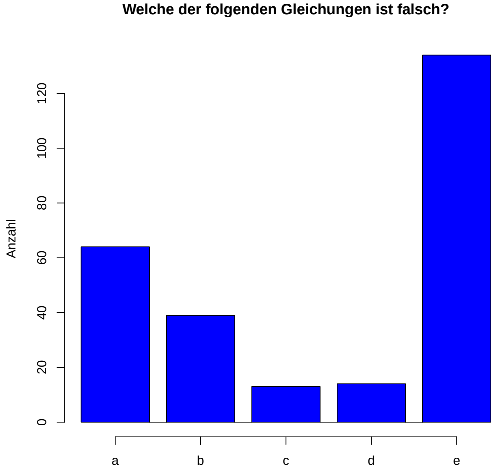
(a) $\{(2,3)\} = \{(3,2)\}$

(b) $(\{2,3\}) = (\{3,2\})$

(c) $\{2,3\} = \{2,3,2\}$

(d) $\{2,3\} = \{3,3,2\}$

(e) weiß nicht



Tupel vs. Mengen

- Das **leere Tupel** () hat die Länge 0.
- Es ist $(1,2) \neq (1,2,1) \neq (1,2,2)$, aber $\{1,2,1\} = \{1,2,2\} = \{1,2\}$.
- (Anna, Peter) ist ein **geordnetes Paar**, {Anna, Peter} ist eine zweielementige Menge, manchmal auch **(ungeordnetes) Paar** genannt.
- Es gilt $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ für beliebige Objekte $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Kartesisches Produkt

Definition (Kartesisches Produkt)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $M_1, \ldots, M_n$ Mengen.

- Das *kartesische Produkt* von $M_1, \ldots, M_n$ ist die Menge $M_1 \times \ldots \times M_n := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \ldots, a_n \in M_n\}$.
- Falls $M := M_1 = M_2 = \ldots = M_n$, so schreiben wir M^n anstelle von $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$.

Beispiel (Seien $A := \{1, 3, 4\}$ und $B := \{a, b, c\}$.)

Dann ist

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\}$$

$A \times B$	a	b	c
1	$(1, a)$	*(1,b)*	*(1,c)*
3	$(3, a)$	$(3, b)$	$(3, c)$
4	$(4, a)$	$(4, b)$	$(4, c)$

STARKER START ins Studium

Kartesisches Produkt (Beispiele)

Modellierungsaufgaben

Wie können wir die folgenden Mengen als kartesische Produkte darstellen?

- die Menge aller Uhrzeiten im 24h-Format HH:MM bzw. (HH,MM)
- die Menge aller 3-Gänge-Menüs mit Vor-, Haupt- und Nachspeise
- die reelle Zahlen-Ebene $\mathbb{R}^2$
- die komplexen Zahlen der Form $a + i \cdot b$
- die leere Menge

Kartesisches Produkt

Satz (Mächtigkeit, Kardinalität)

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ endliche Mengen. Dann gilt

$$|M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ldots \cdot |M_n|.$$

- Wieso ist der Satz für **endliche** Mengen formuliert?
- Was passiert im Fall $M_1 = \emptyset$?

Richtig oder falsch?

a) Wenn $|M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n|$ eine Primzahl ist, dann ist $n = 1$. <u>falsch</u>

b) Wenn $n = 1$ ist, dann ist $|M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n|$ eine Primzahl. <u>falsch</u>

c) Gilt $|A \times B| = 0$, dann ist $A = B = \emptyset$. <u>falsch</u>

Relationen

Definition (Relation)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ Mengen. Eine Teilmenge R des kartesischen Produkts $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ heißt **Relation** von $M_1, M_2, \ldots, M_n$ mit **Stelligkeit** n.

Beispiel

- *die Menge aller Tanzpaare, die zum Abschlussball gehen*
- $\leq$ *als Relationen auf* $\mathbb{N}$
  $\leq := \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- *die Menge aller Geschwisterpaare ist eine zweistellige Relation auf der Menge aller Menschen.*

Frage: Wieso ist jedes kartesische Produkt eine Relation?

Inhalt

Funktionen

Was wir aus der Schule kennen:

- $f(x) = x^2$
- $g(x) = \sin(x)$
- $h(x) = \sqrt{e^x}$
- $\ldots$

Jedes x hat *genau einen* „zugehörigen“ Wert.

Was hat das mit Relationen zu tun?

Funktionen sind Relationen von zwei Mengen, wobei **jedem** Element der ersten Menge, **genau ein** Element der zweiten Menge zugeordnet wird.

Funktionen sind spezielle Relationen.

Funktionen

Definition (Funktion)

Seien X und Y Mengen.

(a) Eine Relation $f \subseteq X \times Y$, bei der es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$ gibt, nennen wir **Funktion von** X **nach** Y (in Zeichen: $f : X \to Y$). Die Menge X heißt **Definitionsbereich** von f und die Menge Y **Bildbereich** von f.

(b) Sei f eine Funktion von X nach Y. Für jedes $x \in X$ bezeichnen wir mit $f(x)$ das eindeutige $y \in Y$, für das $(x, y) \in f$ gilt. Wir nennen $f(x)$ auch den **Funktionswert** von x.

(c) Sei f eine Funktion von X nach Y. Wir nennen die Menge

$$f(X) := \{y \in Y \mid \text{ Es gibt ein } x \in X \text{ mit } f(x) = y\}$$

das **Bild** von f.

Funktion

Bei welchen der folgenden Relationen handelt es sich um Funktionen?

1. Die geordneten Paare der Form (Personalausweisnummer, Einwohner Deutschlands) als Teilmenge des kartesischen Produkts von $\mathbb{N}$ mit den Einwohnern Deutschlands
   nein, denn Personalausweisnummer $\subsetneq \mathbb{N}$
2. Die geordneten Paare der Form (Adresse, Einwohner Deutschlands) als Teilmenge des kartesischen Produkts der Menge aller Adressen in Deutschland und der Einwohner Deutschlands
   nein, denn mehrere Einwohner haben dieselbe Adresse.
3. Die Menge aller tatsächlich gebildeten Tanzpaare der Form (Frau, Mann) als Teilmenge des kartesischen Produkts der weiblichen und der männlichen Tanzkursteilnehmer (vorausgesetzt, jede Frau findet einen Tanzpartner)
   ja, unter der Voraussetzung

Notation von Funktionen

Notation

Die Varianten

- $f_1 = \{(0,0),(1,2),(2,4),(4,8),\dots\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $f_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = 2x\}$
- $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f_3(n) := 2n$
- $f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f_4 : n \mapsto 2n$

beschreiben allesamt dieselbe Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, die jeder natürlichen Zahl ihr Doppeltes zuweist.

Eigenschaften von Funktionen

Definition (surjektiv)

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.
Wir bezeichnen f als **surjektiv**, wenn es für jedes $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

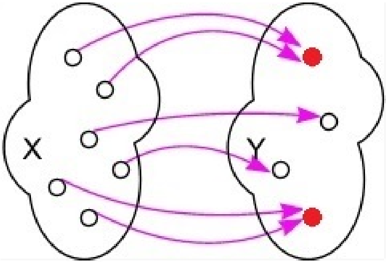


Abbildung: eine surjektive Funktion

Eigenschaften von Funktionen

Definition (injektiv)

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.
Wir bezeichnen f als **injektiv**, wenn es für jedes $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

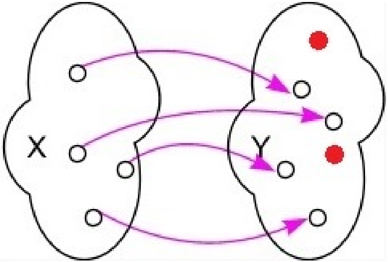


Abbildung: eine injektive Funktion

Eigenschaften von Funktionen

Definition (bijektiv)

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.
Wir bezeichnen f als *bijektiv*, wenn es für jedes $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

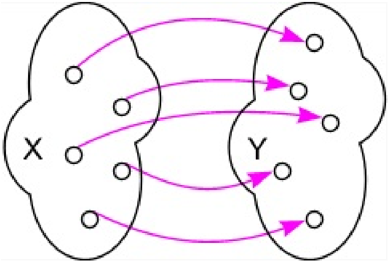
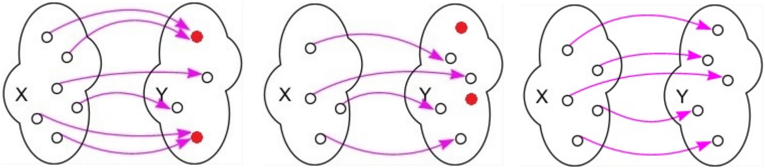


Abbildung: eine bijektive Funktion

Eigenschaften von Funktionen

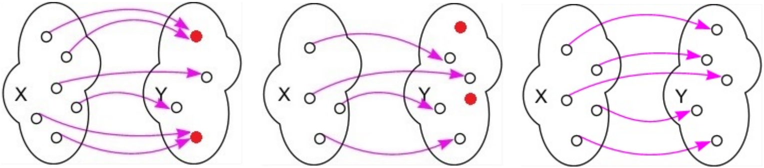


(a) surjektive Funktion (b) injektive Funktion (c) bijektive Funktion

Abbildung: *Quelle:* http://de.wikibooks.org/wiki/Mathematik:_Analysis:_Grundlagen:_Funktionen

Hausaufgabe:
Wieso ist f genau dann bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist?

Eigenschaften von Funktionen



(a) surjektive Funktion (b) injektive Funktion (c) bijektive Funktion

Beispiel: Ist die folgende Funktion surjektiv, injektiv, bijektiv?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := |x|$$

nicht surjektiv, nicht injektiv, nicht bijektiv

Eigenschaften von Funktionen

Satz

Seien X und Y endliche Mengen.
Es gilt $|X| = |Y|$ genau dann, wenn es eine bijektive Funktion von X nach Y gibt.

Beachte: Es gibt keine bijektive Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$, obwohl $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}| = \infty$ gilt.

Inhalt

Wozu Beweise in der Informatik?

Quelle: `http://www.capcomespace.net`

Wozu Beweise in der Informatik?

... um Aussagen wie

1. „Das Programm erfüllt die gewünschte Aufgabe.“ (vgl. Satz von Rice)
2. „Das Programm führt zu keiner Endlosschleife.“ (vgl. Halteproblem)
3. „Zur Lösung dieser Art von Problemen gibt es kein effizientes Patentrezept.“

auf ihren Wahrheitsgehalt zu prüfen, wenn unsere Intuition versagt.

Inhalt

Direkter Beweis

Behauptungen wie

- Wenn eine Zahl durch 10 teilbar ist, dann auch durch 5.
- Die Summe zweier gerader Zahlen ist gerade.
- Eine Zahl ist genau dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und 3 teilbar ist.
- ...

lassen sich durch die Methode des direkten Beweises zeigen.

Vorgehensweise beim direkten Beweis

Wir leiten *sukessive* und *in logisch nachvollziehbaren Schritten* die Behauptung her.
Dabei benutzen wir:

- Definitionen
- bereits bekannte Ergebnisse
- weitere Voraussetzungen (falls notwendig)

$$p$$
$$\downarrow$$
logische Schlussfolgerungen
$$\downarrow$$
$$q$$

Direkter Beweis

Satz

Die Summe zweier gerader Zahlen ist wiederum eine gerade Zahl.

Beweis des Satzes:

Seien a und b gerade Zahlen.

$\Longrightarrow$ a und b sind durch 2 teilbar.

$\Longrightarrow$ $a = 2 \cdot k$ und $b = 2 \cdot l$ für ganze Zahlen k, l.

$\Longrightarrow$ $a + b = 2 \cdot k + 2 \cdot l$ für ganze Zahlen k, l.

$\Longrightarrow$ $a + b = 2 \cdot (k + l)$ für ganze Zahlen k, l.

$\Longrightarrow$ $a + b$ ist durch 2 teilbar

$\Longrightarrow$ $a + b$ ist eine gerade Zahl.

$\square$

Inhalt

Beweis durch Kontraposition

Beispiel

Wenn a^2 ungerade ist, dann ist a ungerade.

Problem: Es bietet sich kein direkter Beweis an.

Lösung: *Beweis durch Kontraposition*

Hausaufgabe: Beweise mithilfe einer Wahrheitstafel, dass $(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$ gilt.

Beispiel (Planet Zutan)

Wenn der Bewohner rot ist, hat er grüne Haare.
$\equiv$ *Wenn der Bewohner keine grünen Haare hat, ist er auch nicht rot.*

Beispiel für einen Beweis durch Kontraposition I

Beispiel

Wenn a^2 ungerade ist, dann ist a ungerade.

Aussage (p, q)	Negation $(\neg p, \neg q)$
a^2 ist eine ungerade Zahl.	a^2 ist eine gerade Zahl.
a ist eine ungerade Zahl.	a ist eine gerade Zahl.

Wir zeigen also:

Satz

Wenn a gerade ist, ist auch a^2 gerade.

Beispiel für einen Beweis durch Kontraposition I

Satz

Wenn a gerade ist, ist auch a^2 gerade.

Beweis:

Sei a eine beliebige gerade Zahl.

$\Longrightarrow$ $a = 2 \cdot k$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2^2 \cdot k^2$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2 \cdot 2 \cdot k^2$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2 \cdot k'$ mit $k' = 2 \cdot k^2$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2 \cdot k'$ für eine ganze Zahl k'

$\Longrightarrow$ a^2 ist durch 2 teilbar, d.h. a^2 ist gerade.

$\square$

Beweis durch Kontraposition

Zusammenfassung: Was ist passiert?

Satz (1)

Wenn a^2 ungerade ist, dann ist a ungerade.

Direkter Beweis schwierig, daher Beweis der **aussagenlogisch äquivalenten** Aussage:

Satz (2)

Wenn a gerade ist, dann ist a^2 ebenfalls gerade.

Damit haben wir Aussage 1 indirekt bewiesen.

Inhalt

Beispiel für einen Beweis durch Widerspruch I

Beispiel

$\sqrt{2}$ *ist irrational.*

Problem: Wo sind Voraussetzung p und Folgerung q?
atomare Aussage
Weder ein direkter noch ein Beweis durch Kontraposition bieten sich an.

Lösung: Angenommen, $\sqrt{2}$ ist rational.
Wir wollen zeigen, dass das zu einem Widerspruch führt.

$\sqrt{2}$ ist irrational, Beweis durch Widerspruch

Angenommen, $\sqrt{2}$ ist rational.

$\Longrightarrow$ $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und teilerfremd,
d.h. $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ („gekürzter Bruch“)

$\Longrightarrow$ $2 = \frac{a^2}{b^2} \Longrightarrow 2 \cdot b^2 = a^2$

$\Longrightarrow$ a^2 ist durch 2 teilbar, da $b^2 \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow$ a ist durch 2 teilbar (bereits bewiesen)

$\Longrightarrow$ $a = 2 \cdot k, k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow$ $2 \cdot b^2 = (2 \cdot k)^2$

$\Longrightarrow$ b^2 ist durch 2 teilbar

$\Longrightarrow$ b ist durch 2 teilbar

$\Longrightarrow$ 2 teilt sowohl a, wie auch b

$\Longrightarrow$ Widerspruch zu a und b sind teilerfremd.

$\Longrightarrow$ $\sqrt{2}$ ist irrational

$\square$

Beweistechniken

- direkter Beweis
  $p \to a_1 \to \cdots \to q$
- Beweis durch Kontraposition
  $\neg q \to a_1 \to \cdots \to \neg p$
- Beweis durch Widerspruch
  $\neg p \to a_1 \to \cdots \to \mathbf{0}$ (Widerspruch, falsche Aussage)

Inhalt

Worauf man beim Beweisen achten sollte

- Angabe der Beweistechnik am Anfang hilft dem Leser die Idee zu verstehen.
- keine Gedankensprünge im Beweis, nur leicht nachvollziehbare Schlussfolgerungen
- Kennzeichnung am Ende eines Beweises (z.B. durch $\square$)
- Bei längeren Beweisen ist zum Schluss ein kurzer Satz, was gezeigt wurde, hilfreich.

Zum Schluss: Organisatorisches

Wo findet meine Übungsgruppe ab 13:00 Uhr statt?

- Gruppe 1: Raum 110 im Matheturm, 1. Stock (**Raumänderung!!**)
- Gruppe 2: SR 11 im Informatikgebäude, Erdgeschoss
- Gruppe 3: SR 307 im Informatikgebäude, 3. Stock
- Gruppe 4: Lernzentrum im Informatikgebäude, Erdgeschoss
- Gruppe 5: Raum 903 im Matheturm, 9. Stock
- Gruppe 6: Raum 902 im Matheturm, 9. Stock

FERTIG! Viel Spaß bei den Übungen!