

Induktion und Rekursion

Vorkurs Informatik
Theoretischer Teil
WS 2015/16

06. Oktober 2015

Vollständige Induktion

Ziel

Ziel

beweise, dass eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel

Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Der kleine Gauß



Der kleine Gauß

- **Aufgabe:** addiert die ersten 100 Zahlen zusammen
berechnet $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$
- **Vermutung:** Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

- **Beweis** durch vollständige Induktion

Summen und Produkte

Definition (Summen und Produkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien a_1, a_2, \dots, a_n beliebige Zahlen. Dann ist:

- $\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_n$

insbesondere ist die leere Summe: $\sum_{i=1}^0 a_i = 0$.

- $\prod_{i=1}^n a_i := a_1 \cdot a_2 \dots a_n$

insbesondere ist das leere Produkt: $\prod_{i=1}^0 a_i = 1$.

Induktionsprinzip

SchlieÙe vom Besonderen auf das Allgemeine.

- 1 **Induktionsanfang:** Zeige, dass A für ein, oder einige kleine Werte von n gilt.
- 2 **Induktionsschritt:** zeige, dass für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: falls $A(n)$ gilt, dann gilt auch $A(n + 1)$.
Vorgehen: **Nimm an**, dass die Aussage für n gilt, **zeige**, dass daraus folgt, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt.

Verwendung der Induktionsannahme!

Insbesondere gilt dann

- $A(1)$, wenn $A(0)$ wahr ist,

damit gilt aber auch

- $A(2)$, da $A(1)$ gilt,
- $A(3)$, da $A(2)$ gilt, usw.

Domino-Effekt

kleiner Gauß

Satz (kleiner Gauß)

$A(n)$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang: $A(1)$

Behauptung: Der Satz gilt für $n = 1$.

Beweis:

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

kleiner Gauß

Satz (kleiner Gauß)

$A(n)$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsschritt: $A(n) \rightarrow A(n+1)$

Induktionsvoraussetzung: Es gilt $A(n)$, also $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsbehauptung: Es gilt $A(n+1)$, also

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

kleiner Gauß

zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Beweis:

an der Tafel

Warum geht das?

- 1 Wir haben die Behauptung für ein spezielles n direkt bewiesen
- 2 Wir haben gezeigt:
Wenn die Behauptung für ein **beliebiges** n gilt,
dann gilt sie auch für den Nachfolger $n + 1$.

Damit kann dann für **alle** n argumentiert werden.

Wahrheitstabelle

Satz

Die Wahrheitstabelle für eine aussagenlogische Formel mit insgesamt n Variablen hat genau 2^n Zeilen.

Kartesisches Produkt

Satz (Mächtigkeit des kartesischen Produkts)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien M_1, M_2, \dots, M_n Mengen. Dann gilt

$$|M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \dots \cdot |M_n|.$$

Was kann schiefgehen? (1/4)

Beispiel

Kein Induktionsanfang:

$A(5 \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar}) \rightarrow B(7 \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar})$

- *logisch korrekte Schlussfolgerung*
- *Aussage ist trotzdem falsch, da Voraussetzung nicht gegeben ist.*

Was kann schiefgehen? (2/4)

Beispiel

Behauptung: *In einen Koffer passen unendlich viele Socken.*

Induktionsanfang: $n = 1$: *Klar, in einen leeren Koffer passt ein Paar Socken.*

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Induktionsvoraussetzung: n Paar Socken passen in den Koffer.

Induktionsbehauptung: $n + 1$ Paar Socken passen in den Koffer.

Beweis: n Paar Socken befinden sich im Koffer. *Aus Erfahrung weiß man*, ein Paar Socken passt immer noch rein.

$\Rightarrow n + 1$ Paar Socken passen in den Koffer.

\Rightarrow *Unendlich viele Socken passen in den Koffer.*

???

Konstruktives Argument hätte sagen müssen, wo genau die Lücke für das extra Paar Socken ist.

Was kann schiefgehen? (3/4)

Beispiel

Behauptung: *Alle Menschen einer Menge M mit $|M| = n$ sind gleich groß.*

Induktionsanfang: *$n = 1$: In einer Menge M , in der sich nur ein Mensch befindet, sind alle Menschen gleich groß.*

Was kann schiefgehen? (4/4)

Beispiel

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Induktionsvoraussetzung: *Alle Menschen einer Menge M mit $|M| = n$ sind gleich groß.*

Behauptung: *Alle Menschen einer Menge M mit $|M| = n + 1$ sind gleich groß.*

Beweis: Sei $M = \{m_1, \dots, m_{n+1}\}$, $M' = \{m_1, \dots, m_n\}$ und $M'' = \{m_2, \dots, m_{n+1}\}$.

$|M'| = |M''| = n \Rightarrow$ *Gemäß Induktionsvoraussetzung sind die Menschen in M' und M'' jeweils gleich groß.*

$m_2 \in M'$ und $m_2 \in M'' \Rightarrow$ *Alle Menschen in M' und M'' gleich groß.*

$M = M' \cup M'' \Rightarrow$ *Alle Menschen in M sind gleich groß.* ???

Induktionsschritt scheitert bei $n = 1$, da $M' = \{m_1\}$ und $M'' = \{m_2\}$.

Wann anwendbar?

- Beweis von Aussagen, die sich auf Objekte beziehen, die als natürliche Zahlen betrachtet werden können.
- $A(n + 1)$ muss sich aus $A(n)$ folgern lassen.
- Aussagen über rekursiv definierte Mengen oder Funktionen.

Rekursion

Rekursion

Definition

Eine rekursive Funktion ist eine Funktion, die durch sich selbst definiert wird.

Rekursionsanfang: Fall (Fälle), für den die Funktion nicht wieder selbst aufgerufen wird.

Rekursionsschritt: Rekursiver Aufruf der Funktion.

Beispiel (Fakultätsfunktion)

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \quad (\text{Rekursionsanfang}) \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst} \quad (\text{Rekursionsschritt}) \end{cases}$$

Fakultätsfunktion (1/3)

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \quad (\text{Rekursionsanfang}) \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst} \quad (\text{Rekursionsschritt}) \end{cases}$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 1 \cdot f(0) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$f(2) = 2 \cdot f(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f(3) = 3 \cdot f(2) = 3 \cdot (2 \cdot 1) = 6$$

Man schreibt auch $f(n) = n!$.

Fakultätsfunktion (2/3)

Satz

Für die Fakultätsfunktion $f(n)$ gilt: $f(n) = \prod_{i=1}^n i$.

Beweis: durch Induktion nach n

Induktionsanfang: $n = 0$

Behauptung: Der Satz gilt für $n = 0$.

Beweis: Es gilt: $f(0) = 1$. Ferner gilt: $\prod_{i=1}^0 i = 1$.

Somit gilt: $f(0) = 1 = \prod_{i=1}^0 i$.

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Induktionsvoraussetzung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f(n) = \prod_{i=1}^n i$.

Induktionsbehauptung: Es gilt: $f(n + 1) = \prod_{i=1}^{n+1} i$.

Fakultätsfunktion (3/3)

Induktionsbehauptung: Es gilt: $f(n+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i$.

Beweis:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= (n+1) \cdot f(n) && \text{Induktionsvoraussetzung anwenden:} \\ &= (n+1) \cdot \prod_{i=1}^n i \\ &= (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \\ &= \prod_{i=1}^{n+1} i \end{aligned}$$



Sind wir fertig?

① Wir haben die Behauptung für $n = 0$ gezeigt.

② Wir haben gezeigt:

Wenn die Behauptung für n gilt, **dann** gilt sie auch für $n + 1$.

wichtig: Verwendung der Induktionsvoraussetzung

Türme von Hanoi

Regeln:

- nur eine Scheibe bewegen
- niemals eine größere auf eine kleinere Scheibe legen.

Algorithmus Türme von Hanoi

Algorithmus

```
1 function hanoi(n, start, ziel, hilf){
2   if (n > 1){
3     hanoi(n-1,start,hilf,ziel)
4   }
5   verschiebe Scheibe n von start auf ziel
6   if (n > 1){
7     hanoi(n-1,hilf,ziel,start)
8   }
9 }
```

Anzahl der Spielzüge

$n = 1$	Schiebe 1 von A nach B	1 Zug
$n = 2$	$1 \curvearrowright C, 2 \curvearrowright B, 1 \curvearrowright B$	3 Züge
$n = 3$	$1 \curvearrowright B, 2 \curvearrowright C, 1 \curvearrowright C, 3 \curvearrowright B, 1 \curvearrowright A, 2 \curvearrowright B, 1 \curvearrowright B$	7 Züge

Satz

Um n Scheiben von einem Stapel zu einem anderen zu transportieren, werden mindestens $2^n - 1$ Spielzüge benötigt.

Beweis Anzahl der Spielzüge

Induktionsanfang: $n = 1$

Behauptung: Um eine Scheibe von A nach B zu setzen, werden $2^1 - 1 = 1$ Spielzüge benötigt.

Beweis: offensichtlich korrekt, wir setzen die Scheibe von A nach B.

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Induktionsvoraussetzung: Um n Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^n - 1$ Spielzüge benötigt.

Induktionsbehauptung: Um $n + 1$ Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^{n+1} - 1$ Spielzüge benötigt.

Induktionsbehauptung: Um $n + 1$ Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^{n+1} - 1$ Spielzüge benötigt.

Beweis:

- 1 transportiere n Scheiben von start auf hilf
- 2 transportiere Scheibe $n + 1$ von start auf ziel
- 3 transportiere n Scheiben von hilf auf ziel

$$2^n - 1 + 1 + 2^n - 1 = 2^n + 2^n - 1 + 1 - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$