Tag 1a - Aussagenlogik und Mengen

Aufgabe 1: Aussagenlogische Formeln entwerfen

Finde die Teilaussagen der folgenden Sätze und stelle eine äquivalente aussagenlogische Formel auf.

(a) Wenn auf der Party nicht geraucht werden darf und Paula nicht zur Party eingeladen ist, dann kommt Petra auf die Party.

(b) Wenn viele Studenten während des Studiums Geld verdienen müssen und die Studienanforderungen nicht gesenkt werden, erhöht sich die durchschnittliche Studiendauer.

(c) Genau dann, wenn die Sonne scheint und es nicht regnet, oder die Lufttemperatur über 25°C ist, geht Tom ins Freibad.

Hinweis: Gehe vor wie in Aufgabe 5.1 im Skript (S.78). Finde die Schlüsselwörter und identifiziere die atomaren Aussagen.

Aufgabe 2: Aussagenlogik: Wahrheitstafeln

Gib für die folgenden aussagenlogischen Formeln jeweils eine Wahrheitstafel an. Stelle für jede der Formeln anhand der Wahrheitstafel fest, ob die Formel unerfüllbar, erfüllbar und/oder eine Tautologie ist.

Hinweis: Definition 5.21 (S.81) und Anmerkung 5.23 im Skript (S.82) könnten hilfreich sein

(a) $A \to B$

(b) $A \vee (B \wedge C)$

(c) $(A \wedge B) \to (A \wedge B)$

(d) $(A \wedge \neg B) \wedge (A \to B)$

Aufgabe 3: Rechenregeln für aussagenlogische Formeln

Zeige mithilfe von Wahrheitstabellen, dass folgende Äquivalenzen gelten:

(a) **Absorptionsgesetze**

- $(A \vee (A \wedge B)) \equiv A$
- $(A \wedge (A \vee B)) \equiv A$

(b) **De Morgan'sche Gesetze**

1. $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$
2. $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$

Aufgabe 4: Verneinung

Finde die Verneinungen für folgende Aussagen:

(a) Alle Studenten besitzen mindestens ein Lehrbuch.

(b) Alle Studenten haben einen GK und einen LK besucht.

(c) Alle Studentinnen haben einen GK Physik oder einen LK Mathe besucht.

(d) Es existiert ein Student, der keine Übungsaufgabe lösen kann.

(e) Jede Studentin hat entweder einen LK Informatik oder einen LK Mathe besucht.

(f) In jeder Übungsgruppe existiert ein Student, der keine Übungsaufgabe lösen kann.

(g) In jeder Übungsgruppe existiert für jede Übungsaufgabe ein Student, der diese Aufgabe lösen kann.

Aufgabe 5: Mengen-Operationen

Gegeben seien folgende Mengen: A:= {1,3,5,7}, B:={3,7,10}, C:={1,2}

(a) Bestimme $A \cup B$.

(b) Bestimme $A \cap B$.

(c) Bestimme $A \cap C$.

(d) Bestimme $B \cap C$.

(e) Bestimme $A \cup B \cup C$.

(f) Bestimme $A \setminus C$.

(g) Bestimme $B \setminus C$.

(h) Sind A und C disjunkt?

(i) Sind B und C disjunkt?

(j) Gib für (a) bis (g) die Kardinalität an.

Aufgabe 6: Mengen

Sei M:={1,2}, N:={2,3,4}. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $M \subseteq N$

(b) $N \subseteq M$

(c) $M = N$

(d) $M \neq N$

(e) $\{2, 4\} \subseteq N$

(f) $2 \in M$

(g) $3 \subseteq N$

(h) $\{2, \{3, 4\}\} \subseteq N$

Aufgabe 7: Darstellung von Mengen

In der Mathematik gibt es mehrere Möglichkeiten, eine Menge zu beschreiben. Die einfachste Notation besteht darin, einfach die Elemente in Mengenklammern aufzuzählen: $\{1, 2, 4, 8, 16\}$. Das geht natürlich nur für kleine Mengen. Ein Beispiel für eine größere Menge ist die Menge der geraden natürlichen Zahlen: $\{n \in \mathbb{N} |$ es ex. $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k\}$. Dies liest man: „Die Menge all derjenigen n aus $\mathbb{N}$, für die es eine natürliche Zahl k gibt, sodass $n = 2k$ gilt."

(a) Versucht nun zu verstehen, welche Elemente die folgenden Mengen haben:

1. $\{n \in \mathbb{N} \mid n > 17, n < 42\}$
2. $\{n \in \mathbb{N} \mid$ es ex. $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 3k + 1\}$
3. $\{17, 18, 19, 18\}$
4. $\{a, b, c, d\}$
5. $\{(m, n) \mid m = 2n\}$

(b) Beschreibt nun die folgenden Mengen in mathematischer Notation:

1. Die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen.
2. Die Menge aller Quadratzahlen.
3. Die Menge mit den Zahlen 6, 28, 496 und 8128.
4. Die Menge aller geraden Zahlen zwischen 10 und 100.
5. Die Menge aller Quadratzahlen zwischen 28 und 34.

Aufgabe 8: Wahre Freunde

Um mit ihren Freunden in Kontakt zu bleiben benutzt Sabrina facebook, WhatsApp und Threema. In facebook hat Sie 174 Kontakte, in WhatsApp 41 und in Threema 17 Kontakte. Davon sind 32 Kontakte in facebook und in WhatsApp, 9 in facebook und in Threema, 5 in WhatsApp und in Threema, und 2 Kontakte haben facebook, WhatsApp und Threema. Sei F die Menge aller Kontakte in facebook, W die Menge aller Kontakte in WhatsApp und T die Menge aller Kontakte in Threema.

(a) Zeichne ein Venn-Diagramm, in dem die Mengen F, W, T, $F \cap W$, $F \cap T$, $W \cap T$ und $F \cap W \cap T$ erkennbar sind.

(b) Wieviele tatsächliche Freunde (*verschiedene* Kontakte) hat Sabrina insgesamt? (d.h. berechne $|F \cup W \cup T|$.
Hinweis: Schau dir dein Venn-Diagramm gut an

Viel Erfolg!