



## Tag 5a - Induktion und Rekursion

### Aufgabe 1: Summen und Produkte

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke ausführlich hin.

- a)  $\sum_{k=1}^5 k^2$
- b)  $\sum_{k=1}^9 2$
- c)  $\sum_{i=1}^6 \frac{1}{i}$
- d)  $\prod_{k=1}^9 2$
- e)  $\prod_{k=1}^5 k^2$
- f)  $\sum_{i=1}^3 \prod_{k=1}^4 ik$
- g)  $\prod_{i=1}^3 \sum_{k=1}^4 ik$
- h)  $\sum_{i=1}^5 \sum_{k=1}^4 1$
- i) Sei  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ , gegeben durch  $f(n) = (1 - 2n)$ .  
Berechne  $\sum_{i=1}^6 f(i)$ . Was ist  $\sum_{i=1}^n f(i)$ ?

### Aufgabe 2: Rekursion

Die Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sei gegeben durch die Vorschrift

$$f(n) := \begin{cases} 3, & \text{falls } n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(3)$  und  $f(4)$ .

### Aufgabe 3: Ungerade Zahlen

Summiert man die ersten ungeraden Zahlen, so erhält man *anscheinend* stets eine Quadratzahl:

$$\begin{array}{rclcl} 1 & = & 1 & = & 1^2 \\ 3 + 1 & = & 4 & = & 2^2 \\ 5 + 3 + 1 & = & 9 & = & 3^2 \\ 7 + 5 + 3 + 1 & = & 16 & = & 4^2 \\ 9 + 7 + 5 + 3 + 1 & = & 25 & = & 5^2 \end{array}$$

Diesen Umstand sollen Sie in allgemeiner Form beweisen (s.u.). Hierzu ein paar Erläuterungen:

Eine *gerade* Zahl lässt sich in der Form  $2 \cdot n$  schreiben mit  $n \in \mathbb{N}$ .

Eine *ungerade* Zahl lässt sich in der Form  $2 \cdot n + 1$  schreiben mit  $n \in \mathbb{N}$ .

In den obigen fünf Summen gilt: Ist der letzte Summand die Zahl  $2n + 1$ , so ist der Wert der Summe  $(n + 1)^2$ . In der letzten Beispielzeile wird bis  $9 = 2 \cdot 4 + 1$  summiert und die Summe ergibt  $(4 + 1)^2 = 5^2$ .

*Achtung: Dies alles ist nur eine Erläuterung der zu beweisenden Formel. Wir haben noch keinen Beweis für die allgemeine Formel geführt!*

**Zeige:** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{i=0}^n (2i + 1) = (n + 1)^2$$

#### Aufgabe 4: Induktive Argumentation

Sei  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Beweisen Sie durch induktive Argumentation folgende Aussage:  
 $n$  Elemente lassen sich auf  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$  Arten anordnen.

#### Aufgabe 5: Vollständige Induktion

Zeige die folgende Aussage per Induktion für alle natürlichen Zahlen  $n$ :

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$$

#### Aufgabe 6: Rekursion und die Induktion

Betrachte die Menge

$$M_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 9, \text{ es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ s.d. } n = 3 \cdot k\}$$

- Beschreibe die Menge umgangssprachlich
- Notiere die 5 kleinsten Elemente der Menge  $M_1$
- Definiere die Menge  $M_1$  rekursiv.
- Entwickle eine Beweistechnik, die mittels Induktion eine Aussage über  $M_1$  beweist.

#### Aufgabe 7: Rekursive Definition

Gib eine rekursive Funktion

- $\text{sum}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  an, die die Summe der Zahlen 0 bis  $n$  berechnet.
- $\text{fib}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  an, die die Fibonacci-Zahlen berechnet. Die Fibonacci-Zahlen ist eine Folge von Zahlen, wobei die ersten beiden Zahlen 0 und 1 sind und die nachfolgende Zahl immer die Summe der beiden vorangegangenen Zahlen ist. Die Folge lautet also: 0, 1, 1, 2, 3, 5, ...

Viel Erfolg!