Vorsemesterkurs Informatik

Elizaveta Kovalevskaya

WS 2017/18

04. Oktober 2017

Theoretische Informatik

Wieso, weshalb, warum ??!?

1. Modellieren und Formalisieren von Problemen und Lösungen
2. Verifikation (Beweis der Korrektheit)

Quelle:http://www.capcomespace.net

Überblick

- heute (04.10.):
  - Aussagenlogik
  - Mengen
- Freitag (06.10.):
  - Relationen und Funktionen
  - Beweistechniken
- Dienstag (10.10.):
  - Induktion und Rekursion

Was ist das?

- Lehre des vernünftigen Schlussfolgerns
- Beschäftigt sich u.a. mit der Frage:
  - Wie kann man Aussagen miteinander verküpfen?
  - Auf welche Weise kann man formale Schlüsse ziehen und Beweise durchführen?

Warum ist das wichtig?

- Modellierung von Wissen (z.B. künstliche Intelligenz)
- Auswertung von Datenbankanfragen
- Kontrollfluss von Computerprogrammen (`if-then-else`-Konstrukte)
- Logikbausteine in der technischen Informatik (Hardware)
- Verifikation von
  - Schaltkreisen
  - Programmen
  - Protokollen (Kommunikation zwischen Systemen z.B. Internetbanking)

Logische Aussagen

Definition (Aussage)

*Eine **logische Aussage** (kurz **Aussage**) ist ein Satz oder Ausdruck, der entweder wahr (1) oder falsch (0) sein kann.*
*0 und 1 werden auch **Wahrheitswerte** genannt.*

zum Beispiel:

- Die Sonne scheint.
- Eine Zahl ist durch 3 teilbar.
- $3 > 7$
- Wenn der Bewohner rot ist, dann hat er grüne Haare.

Logische Aussagen

Keine logischen Aussagen sind dagegen:

- $1 + 2$, es kann kein Wahrheitswert (wahr oder falsch) zugeordnet werden.
- 2 ist eine kleine Zahl , denn „klein" ist für Zahlen nicht definiert.
- Aufforderungen und Fragen
- „Dieser Satz ist falsch.", da dieser Satz weder wahr noch falsch sein kann.

Atomare Aussagen

Definition

Atomare Aussagen *sind Aussagen, die nicht weiter zerlegt werden können.*

Beispiel

Wenn *die Sonne scheint,* ***dann*** *gehe ich an den Strand* ***und*** *sonne mich.*

Atomare Aussagen:

> *A:= „Die Sonne scheint."*
> *B:= „Ich gehe an den Strand."*
> *C:= „Ich sonne mich."*

$$\varphi = (A \rightarrow (B \wedge C))$$

Syntax der Aussagenlogik

Die **Syntax** legt fest, welche Zeichenketten (Worte) Formeln der Aussagenlogik sind.

Definition (Syntax der Aussagenlogik)

i) *Jede atomare Aussage ist eine aussagenlogische Formel (aF).*

ii) ***0*** *ist eine aussagenlogische Formel (aF).*

iii) ***1*** *ist eine aussagenlogische Formel (aF).*

Rekursive Regeln

iv) *Wenn φ eine aF ist, dann ist auch $\neg\varphi$ eine aF.*

v) *Wenn φ eine aF ist und ψ eine aF ist, dann sind*
- $(\varphi \wedge \psi)$,
- $(\varphi \vee \psi)$,
- $(\varphi \rightarrow \psi)$ *und*
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$

ebenfalls aussagenlogische Formeln.

Beispiele

Seien A, B und C atomare Aussagen.

- $(0 \vee 1)$
- $(\neg A \wedge B)$
- $\neg(A \wedge B)$
- $(A \rightarrow (B \vee C))$

Semantik der Aussagenlogik

Die **Semantik** legt fest, welche *Bedeutung* einzelne Formeln haben.

Definition (Negation, $\neg$)

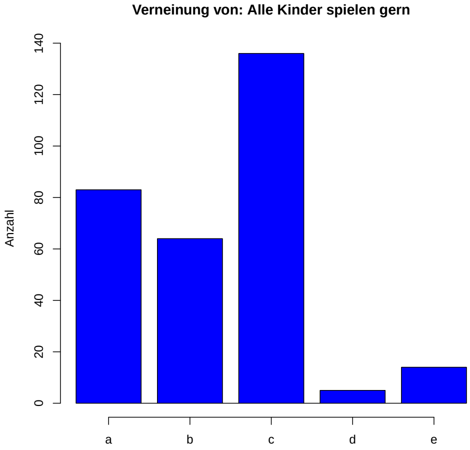
Die Formel $\neg A$ (bedeutet: "nicht A") ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Beispiel (Frage 21)

A:=„Alle Kinder spielen gern."

a) *Kein Kind spielt gern.*
b) *Alle Kinder spielen nicht gern.*
c) *Nicht alle Kinder spielen gern.*
d) *Alle Kinder hassen Spiele.*

Anmeldung


Verneinung von: Alle Kinder spielen gern
Anzahl
0
20
40
60
80
100
120
140
a
b
c
d
e

Semantik der Aussagenlogik

Die **Semantik** legt fest, welche *Bedeutung* einzelne Formeln haben.

Definition (Negation, $\neg$)

Die Formel $\neg A$ (bedeutet: "nicht A") ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Beispiel (Frage 21)

A:=„Alle Kinder spielen gern."
$\neg$A:=„Nicht alle Kinder spielen gern."
Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
0	1
1	0

Konjunktion

Definition (Konjunktion, $\wedge$)

Die Formel $(A \wedge B)$ (bedeutet: “A und B”) ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr ist.

Wahrheitstafel:

A	B	$(A \wedge B)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Beispiel

$A :=$ *„Alice hat einen Hund.“*, $B :=$ *„Bob hat eine Katze. “*

$(A \wedge B) =$ *„Alice hat einen Hund* ***und*** *Bob hat eine Katze. “*

Disjunktion

Definition (Disjunktion, $\vee$)

Die Formel $(A \vee B)$ (bedeutet: "A oder B") ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen A oder B wahr sind.

Wahrheitstafel:

A	B	$(A \vee B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Beispiel

$A :=$ *„Alice hat einen Hund.“*, $B :=$ *„Bob hat eine Katze. “*

$(A \vee B) =$ *„Alice hat einen Hund* ***oder*** *Bob hat eine Katze. “*

Implikation

Definition (Implikation, $\rightarrow$)

Die Formel $(A \rightarrow B)$ (bedeutet: "Wenn A, dann B") ist genau dann wahr, wenn A falsch ist, oder sowohl Aussage A als auch Aussage B wahr sind.

Wahrheitstafel:

A	B	$(A \rightarrow B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Beispiel

$(A \rightarrow B) =$ *„**Wenn** Alice in der Klausur die Note 4.0 schreibt, **dann** hat Alice bestanden. “*

Frage 22: Für alle Bewohner des Planeten Zultan gilt:

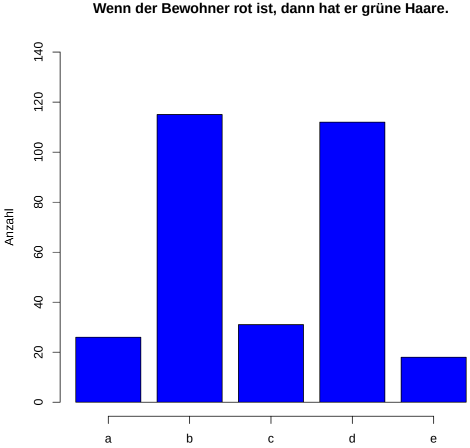
Wenn der Bewohner rot ist, **dann** hat er grüne Haare.

a) Wenn der Bewohner nicht rot ist, dann hat er keine grünen Haare.

b) Wenn der Bewohner keine grünen Haare hat, dann ist er nicht rot.

c) Wenn der Bewohner grüne Haare hat, dann ist er rot.

d) Alle sind richtig



Biimplikation

Definition (Biimplikation, $\leftrightarrow$)

Die Formel $(A \leftrightarrow B)$ (bedeutet: "A genau dann, wenn B") ist genau dann wahr, wenn Aussagen A und B beide falsch oder beide wahr sind.

Wahrheitstafel:

A	B	$(A \leftrightarrow B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Beispiel

$(A \leftrightarrow B) =$ *„Alice hat eine Note zwischen 1.0 und 4.0* ***genau dann, wenn*** *Alice die Prüfung bestanden hat. “*

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit

Definition (Erfüllbarkeit)

*Eine aussagenlogische Formel φ heißt **erfüllbar**, wenn es (mindestens) eine Belegung der Variablen gibt, sodass die Formel den Wahrheitswert 1 hat.*

z.B. $(A \land B)$

Definition (Unerfüllbarkeit)

*φ heißt **unerfüllbar**, wenn es **keine** erfüllende Belegung gibt.*

z.B. $(A \land \neg A)$

Definition (Allgemeingültigkeit)

*φ heißt **allgemeingültig** (auch **Tautologie**), wenn φ für **jede** Belegung den Wahrheitswert 1 annimmt.*

z.B. $(A \lor \neg A)$

Äquivalenz

Definition

*Zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ heißen **äquivalent** ($\equiv$), wenn die Wahrheitswerte für **alle** passenden Belegungen für φ und ψ identisch sind.*

Beispiel

Für $\varphi = (\neg A \vee B)$ und $\psi = (A \to B)$ gilt: $\varphi \equiv \psi$.
Wahrheitstafel:

A	B	$\neg A$	φ $(\neg A \vee B)$	ψ $(A \to B)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Wieso, weshalb, warum?

- Wir wollen:
  - allgemeingültige Aussagen treffen.
  - “allgemeingültige” Lösungen finden.
- Wir benötigen Strukturen,
  - die Objekte/Konzepte zusammenfassen und verwalten.
  - die relevante Eigenschaften für die Problemstellung beinhalten.
  - über die wir Aussagen machen können.
  - deren Eigenschaften und Aussagen wir beweisen können.

Mengen

Definition (Menge (nach Cantor))

Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche „Elemente der Menge M“ genannt werden, zu einem Ganzen.

zum Beispiel:

- die Menge aller natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$
- die Menge aller Vorkursteilnehmer
- die Menge aller Bücher in der Informatikbibliothek
- die Menge aller aussagenlogischer Formeln

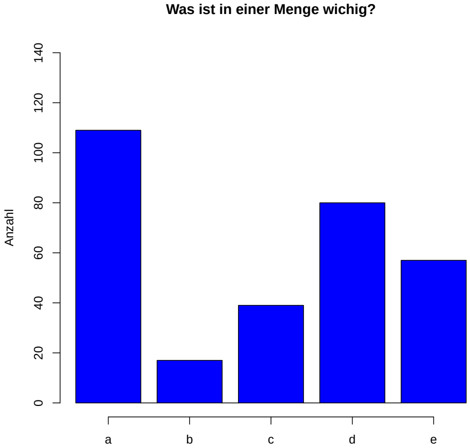
Frage 13: Was ist in einer Menge wichtig?

a) Das Vorhandensein der Elemente

b) Die Reihenfolge der Elemente

c) Die Häufigkeit des Auftretens der Elemente

d) Alle drei der oben genannten Eigenschaften



Beschreibung bzw. Definition

Notation:

$m \in M \quad :\Leftrightarrow \quad m$ ist Element der Menge M.

$m \notin M \quad :\Leftrightarrow \quad m$ ist kein Element der Menge M.

- *extensional*, aufzählen der Elemente
  z.B. $M_1 := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$
- *intensional*, Angabe von charakteristischen Eigenschaften der Elemente
  z.B. $M_1 := \{x | x \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq 7\}$

Definition (leere Menge)

*Die **leere Menge** $\emptyset$ ist die Menge, die kein(e) Element(e) enthält.*
$\emptyset = \{\}$

Beachte:

$$\emptyset \neq \{\emptyset\}$$

Eigenschaften

- Alle Elemente einer Menge sind **verschieden**. D.h. kein Wert kann "mehrfach" vorkommen.
- Elemente einer Menge haben **keine** feste Reihenfolge.
- Eine Menge M kann auf verschiedenen Arten beschrieben werden

  z.B:

$$\begin{aligned} M &= \{1,3,5,7\} \\ &= \{3,5,7,1\} \\ &= \{1,1,5,3,5,7\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 7, x \text{ ist ungerade}\} \end{aligned}$$

- Mengen können auch "verschiedenartige" Elemente enthalten
  z.B.: $M = \{7, Haus, (Herz, 3), -4, \{l, m, n\}, 9\}$

Mengenalgebra I

Definition (Gleichheit, Teilmenge, Obermenge)

Seien M und N Mengen.

- *M und N sind genau dann **gleich** (kurz: $M = N$), wenn sie **dieselben** Elemente enthalten.*
- *M ist genau dann eine **Teilmenge** von N (kurz: $M \subseteq N$), wenn jedes Element von M auch ein Element von N ist.*
- *M ist genau dann eine **echte Teilmenge** von N (kurz: $M \subsetneq N$), wenn jedes Element von M auch ein Element von N ist, aber nicht jedes Element von N auch ein Element von M (kurz: $M \subseteq N$ und $M \neq N$).*
- *M ist genau dann eine **Obermenge** von N ($M \supseteq N$), wenn N eine Teilmenge von M ist (kurz: $N \subseteq M$).*

Satz 1

Satz

Seien L, M und N Mengen, für die $L \subseteq M$ und $M \subseteq N$ gilt. Dann gilt auch $L \subseteq N$.

Beispiel

Sei $L = \{Stein, Schere, Papier\}$, $M = \{Stein, Schere, Papier, Eidechse\}$ und $N = \{Stein, Schere, Papier, Eidechse, Spock\}$.
Dann gilt:

- $L \subseteq M$
- $M \subseteq N$
- $L \subseteq N$

Satz 2

Satz

Seien M und N Mengen. $M = N$ gilt genau dann, wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ gelten.

Beispiel

- *Sei $M = \{3, 4, 5\}$ und $N = \{4, 3, 5\}$. Dann ist:*

  $M \subseteq N$, da alle Elemente von M auch in N sind.
  $N \subseteq M$, da alle Elemente von M auch in N sind.
  $\rightarrow M = N$.

- *Sei $M = \{3, 4, 5\}$ und $N = \{3, 4\}$. Dann ist:*

  $N \subseteq M$ und $M \not\subseteq N$ und $M \neq N$

Mengenalgebra II

Definition (Schnitt, Vereinigung, Differenz...)

Seien M und N Mengen.

- *Der **Schnitt** von M und N ist die Menge*

$$M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}.$$

- *Die **Vereinigung** von M und N ist die Menge*

$$M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}.$$

- *Die **Differenz** von M und N ist die Menge*

$$M \setminus N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}.$$

- *M und N heißen **disjunkt**, wenn sie kein gemeinsames Element enthalten (kurz: $M \cap N = \emptyset$).*

Mächtigkeit, Kardinalität

Definition

- *Eine Menge M heißt **endlich**, wenn sie nur endlich viele Elemente enthält, d.h. es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass M genau n viele Elemente enthält.*
- *Die Anzahl der Elemente einer Menge M bezeichnet man auch als **Mächtigkeit** (oder Kardinalität) der Menge M (in Zeichen: $|M|$).*

$$|M| := \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente in } M, & \text{falls } M \text{ endlich ist} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

z.B.:

- $|\{4, 7, 2\}| = 3$,
- $|\{7, Haus, (Herz, 3), -4, \{l, m, n\}, 9\}| = 6$,
- $|\emptyset| = 0$ **aber** $|\{\emptyset\}| = 1$

Satz 3

Satz

Seien M und N Mengen. Es gilt $|M \cup N| = |M| + |N|$ genau dann, wenn M und N disjunkt sind.

Beispiel

- *Sei $M = \{Stein, Papier, Schere\}$ und $N = \{3, Haus, Spock, 5\}$. Dann ist:*

  $$M \cap N = \emptyset \text{ und } M \cup N = \{Stein, Papier, Schere, 3, Haus, Spock, 5\}$$
  $$\text{und } |M \cup N| = 7 = 3 + 4 = |M| + |N|.$$

- *Sei $M = \{Stein, Papier, Schere\}$ und $N = \{Schere, Haus, 5\}$ Dann ist:*

  $$M \cap N = \{Schere\} \text{ und}$$
  $$M \cup N = \{Stein, Papier, Schere, Haus, 5\} \text{ und}$$
  $$|M \cup N| = 5 \neq 3 + 3 = |M| + |N|$$

Die Elemente der Schnittmenge werden doppelt gezählt.