Übungszettel 1b - Aussagenlogik und Mengen

Aufgabe 1: Logische Negation

Gib zu den folgenden Aussagen jeweils die Gegenaussage (Negation) an. Tipp: überlege dir zuerst, welche Aussagenteile „immer" (d.h. „für alle"), und welche „manchmal" (d.h. „es existiert") gelten.

(a) Wenn es regnet, ist die Straße nass.

(b) Es gibt kein Tier, das genau ein Ohr und genau zwei Augen hat.

(c) Das Quadrat einer ganzen Zahl ist immer gerade.

(d) Für jeden Vorschlag gibt es jemanden, der ihn kritisiert.

(e) Keine Regel ohne Ausnahme.

(f) In manchen Häusern gibt es nicht in jeder Wohnung fließendes Wasser.

Aufgabe 2: Aussagenlogik: Formalisierung

Übersetze die folgenden Aussagen in Implikationen, indem du geeignete Abkürzungen wie etwa M für Mathematiker verwendest.

(a) Gemütliche Menschen stehen erst nach 9:00 Uhr auf.

(b) Wer nicht gemütlich ist, ist hektisch.

(c) Wer nicht ruhig ist, kann kein Mathematiker sein.

(d) Wer hektisch ist, ist nicht ruhig.

Prüfe, ob sich aus den obigen Aussagen die Aussage „Mathematiker stehen erst nach 9:00 Uhr auf" folgern lässt.

Aufgabe 3: Aussagenlogische Umformung **schwierig**

(a) Stelle die Biimplikation (auch: Äquivalenz) „$\leftrightarrow$" durch eine Kombination der Verknüpfungen „$\rightarrow$", „$\wedge$" dar.

(b) Stelle die Implikation „$\rightarrow$" durch eine Kombination der Verknüpfungen „$\neg$", „$\vee$" dar.

(c) Zeige, dass sich die Verknüpfung „$\wedge$" durch eine Kombination der Verknüpfungen „$\neg$", „$\vee$" darstellen lässt, dass also Disjunktion und Negation ausreichend sind, um die komplette Semantik der Aussagenlogik abzubilden.

(d) Zeige, dass sich die Verknüpfung „$\vee$" durch eine Kombination der Verknüpfungen „$\neg$", „$\wedge$" darstellen lässt, dass also Konjunktion und Negation ausreichend sind, um die komplette Semantik der Aussagenlogik abzubilden.

Aufgabe 4: De Morgan'sche Gesetze

Zeige durch Umformen, dass folgende Äquivalenzen gelten:

(a) **Absorptionsgesetze**

1. $(A \vee (A \wedge B)) \equiv A$
2. $(A \wedge (A \vee B)) \equiv A$

(b) **De Morgan'sche Gesetze**

1. $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$

2. $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$

Aufgabe 5: Mengendarstellung

Definition:

Es sei $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ die Vereinigung der Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$; also eine Kurzschreibweise für $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.

Es sei $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ der Schnitt der Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$; also eine Kurzschreibweise für $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.

(a) Beschreibe folgende Mengen umgangssprachlich

(i) $\{x | x \in \mathbb{Z},\ \text{es ex. } k \in \mathbb{Z}, x = 3 \cdot k\}$

(ii) $\{x^3 | x \in \mathbb{Z}, x^2 > 3\}$

(iii) $\{x | x \in \mathbb{Z}, 3x + 2 < 1\}$

(iv) $\{(x, y) | x, y \text{ sind Menschen}, x \neq y, \text{Eltern von } x = \text{Eltern von } y\}$

(b) Die Mengen $A_1 := \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 := \{2, 4, 5\}$, $A_3 := \{3, 4, 5, 6\}$ und $A_4 := \{4, 5, 6, 7\}$ sind gegeben. Beschreibe die folgenden Mengen in extensionaler Form.

(i) $\bigcup_{i=1}^{3} A_i$

(ii) $\bigcap_{j=1}^{4} A_j$

(iii) $\bigcup_{k=2}^{4} (A_k \setminus A_{k-1})$

Viel Erfolg!