Übungszettel 5b - Induktion und Rekursion

Aufgabe 1: Rekursion

Betrachte die folgende rekursive Funktion

$$f : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$$
$$f(1) = 2$$
$$f(n) = f(n-1) + n^2 - n$$

(a) Werte die Funktion an $f(5)$ aus.

(b) Klassifiziere den Basis- und den Rekursionsfall.

(c) Notiere eine gleiche Funktion $g : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ in nicht rekursiver Form unter Verwendung des Summen- oder des Produktzeichens.

(d) Beweise, dass die beiden Funktionen gleich sind.

Aufgabe 2: Vollständige Induktion

Zeige die folgenden Aussagen per Induktion für alle natürlichen Zahlen n:

(a) $\sum_{i=1}^{n} i \cdot (i+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$

(b) $\sum_{i=0}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$

Aufgabe 3: Vollständige Induktion als Beweistechnik

Beweise durch vollständige Induktion:

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ ist } n! \leq n^n.$$

Aufgabe 4: Papierstreifen

Wie viele Faltkanten entstehen, wenn man einen Papierstreifen n-mal immer wieder in der Mitte faltet? Beweise, dass deine Lösung korrekt ist.
Bemerkung: Mit "immer wieder in der Mitte" falten ist gemeint, dass das Blatt zwischendrin nicht gedreht wird. Wenn die erste Faltung parallel zu der kurzen Blattseite verläuft, so laufen alle anderen Faltungen ebenfalls parallel dazu. Die Faltungen kreuzen sich nicht!

Aufgabe 5: (Induktive Argumentation)

Zeigen Sie: Teilt man ein Rechteck durch Geraden in Teilflächen, so kann man die Teilflächen immer so mit den Farben Schwarz und Weiß färben, dass Teilflächen, die an einer Kante zusammenstoßen, verschiedene Farben besitzen.

Aufgabe 6: (Teilmengen)

Die Menge $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ bestehe aus n Objekten, die wir mit u_i bezeichnen.
Zeigen Sie: Die Menge U besitzt genau 2^n Teilmengen.
Hinweis: Bedenken Sie, dass auch die leere Menge eine Teilmenge von U ist.

Viel Erfolg!