Vorsemesterkurs Informatik

Ronja Düffel
WS2018/19

4. Oktober 2018

Übersicht

- Relationen
- Funktionen
- Beweistechniken
  - direkter Beweis
  - Beweis durch Kontraposition
  - Beweis durch Widerspruch

Wie war das noch?

Mengen

- Zusammenfassen von wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen
- Reihenfolge der Elemente ist irrelevant
- Elemente können nicht *mehrfach* in einer Menge vorkommen

Beispiel

$$\begin{aligned} \mathit{Abendmenü} &:= \{\mathit{Fischsuppe}, \mathit{Wildschweinragout}, \mathit{Eis}\} \\ &= \{\mathit{Eis}, \mathit{Fischsuppe}, \mathit{Wildschweinragout}\} \\ &= \{\mathit{Eis}, \mathit{Fischsuppe}, \mathit{Eis}, \mathit{Wildschweinragout}, \mathit{Eis}\} \end{aligned}$$

Problem: Mengen erlauben uns nicht

- Reihenfolge festzulegen
- Mehrfaches Vorkommen zu beschreiben

Tupel

Definition (Tupel)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

1. Für n Objekte $a_1, \ldots, a_n$ bezeichnet $(a_1, \ldots, a_n)$ das **Tupel** mit Komponenten $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
2. a_i ist die i**-te Komponente** und die Zahl n heißt **Länge** des Tupels.
3. Tupel der Länge 2 nennen wir auch **geordnete Paare**, Tupel der Länge 3 **Tripel**, Tupel der Länge n kurz n-**Tupel**.
4. Zwei Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_m)$ sind **gleich**, falls $m = n$ ist und für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $a_i = b_i$.

Frage 17

Welche der folgenden Gleichungen ist falsch?

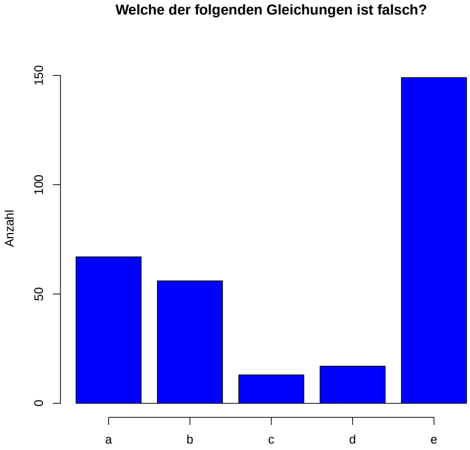
a) $\{(2,3)\} = \{(3,2)\}$

b) $(\{2,3\}) = (\{3,2\})$

c) $\{2,3\} = \{2,3,2\}$

d) $\{2,3\} = \{3,3,2\}$

Anmeldung


Welche der folgenden Gleichungen ist falsch?
Anzahl
0
50
100
150
a
b
c
d
e

Tupel vs Mengen

- Das leere Tupel () hat die Länge 0.
- Es ist $(1,2) \neq (1,2,1) \neq (1,2,2)$, aber $\{1,2,1\} = \{1,2,2\} = \{1,2\}$.
- (Anna, Peter) ist ein geordnetes Paar, {Anna, Peter} ist eine zweielementige Menge, manchmal auch *Paar* genannt.
- Es gilt $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ für beliebige Objekte $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Kartesisches Produkt

Definition (Kartesisches Produkt)

Das *kartesische Produkt* zweier Mengen A und B ist die Menge

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Beispiel:
Sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{x, y\}$. Dann ist das Kartesische Produkt:

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$$

Kartesisches Produkt

Definition

Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $M_1, \ldots, M_k$ Mengen. Das kartesische Produkt von $M_1, \ldots, M_k$ ist die Menge

$$M_1 \times \cdots \times M_k := \{(m_1, \ldots, m_k) | m_1 \in M_1, \ldots, m_k \in M_k\}$$

Falls $M = M_1 = M_2 = \ldots = M_k$, so schreiben wir M^k anstelle von $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k$.

Beispiel

Abendmenü

V := {Fischsuppe, Gemüsesuppe}, H := {Wildschweinragout, Pizza},
N := {Eis, Obstsalat}
Abendmenü := V × H × N
mögl. Abendmenü: (Fischsuppe, Wildschweinragout, Eis)
Kindermenü := N × V × N × H × N
mögl. Kindermenü: (Eis, Fischsuppe, Eis, Wildschweinragout, Eis)

Kartesisches Produkt (Beispiele)

- Das kartesische Produkt der Mengen $\{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$ und $\{A, K, D, B, 10, 9, 8, 7\}$ ist die Menge aller Karten in einem Skatblatt.$\{(\clubsuit, A), (\spadesuit, A), (\heartsuit, A), (\diamondsuit, A), \ldots, (\heartsuit, 7), (\diamondsuit, 7)\}$
- Die Menge aller Uhrzeiten im Format SS:MM ist $\{00, 01, \ldots, 23\} \times \{00, 01, \ldots, 59\}$.
- Die Menge aller dreigängigen Menüs, die eine Speisekarte bietet, ist $V \times H \times N$, wobei V die Menge aller Vorspeisen, H die Menge aller Hauptspeisen, N die Menge aller Nachspeisen ist.
- Die reelle Zahlenebene ist $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

STARKER START ins Studium

Kartesisches Produkt

Satz (Mächtigkeit)

Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $M_1, M_2, \ldots, M_k$ Mengen. Dann gilt

$$|M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ldots \cdot |M_k|.$$

Beispiel:
Skatkartenspiel: $F \times W$ mit
$F := \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$ und $W := \{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$
Mächtigkeit von $|F \times W| = |F| \cdot |W| = 4 \cdot 8 = 32$

Relationen

Definition (Relation)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ Mengen. Eine Teilmenge R des kartesischen Produkts $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ heißt **Relation** von $M_1, M_2, \ldots, M_n$ mit **Stelligkeit** n.

Beispiel

- *die Skatkarten, die ich auf der Hand habe, als 2-stellige Relation der Mengen* $F := \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$ *und* $W := \{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$
- $\leq$ *als Relation auf* $\mathbb{N}$
  $\leq = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- *die Menge aller Geschwisterpaare als zweistellig Relation auf der Menge aller Menschen.*

Bemerkung:

Jedes kartesische Produkt ist eine Relation

Funktionen

Funktionen

Was wir aus der Schule kennen:

- $f(x) = x^2$
- $g(x) = \sin(x)$
- $h(x) = \sqrt{e^x}$
- ...

Jedes x hat *genau einen* “zugehörigen“ Wert.

Funktionen sind Relation von zwei Mengen, wobei **jedem** Element der ersten Menge, **genau ein** Element der zweiten Menge zugeordnet wird.

Funktionen sind spezielle Relationen.

Funktionen

Definition (Funktion)

Seien X und Y Mengen.

(a) Eine Relation $f \subseteq X \times Y$, bei der es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$ gibt, nennen wir **Funktion von** X **nach** Y (in Zeichen: $f : X \to Y$). Die Menge X heißt **Definitionsbereich** von f und die Menge Y **Bildbereich** von f.

(b) Sei f eine Funktion von X nach Y. Für jedes $x \in X$ bezeichnen wir mit $f(x)$ das eindeutige $y \in Y$, für das $(x, y) \in f$ gilt. Wir nennen $f(x)$ auch den **Funktionswert** von x.

(c) Sei f eine Funktion von X nach Y. Wir nennen die Menge

$$f(X) := \{y \in Y \mid \text{ Es gibt ein } x \in X \text{ mit } f(x) = y\}$$

das **Bild** von f.

Funktion

Bei welchen der folgenden Relationen handelt es sich um Funktionen?

1. Die geordneten Paare der Form (Matrikelnummer, Studierende) als Teilmenge des kartesischen Produkts von $\mathbb{N}$ mit den Studiernden der Goethe Universität
   nein, denn Matrikelnummer $\subsetneq \mathbb{N}$

2. Die geordneten Paare der Form (Adresse, Einwohner Deutschlands) als Teilmenge des kartesischen Produkts der Menge aller Adressen in Deutschland und der Einwohner Deutschlands
   nein, denn mehrere Einwohner haben dieselbe Adresse.

3. Die Menge aller tatsächlich gebildeten Tanzpaare der Form (Frau, Mann) als Teilmenge des kartesischen Produkts der weiblichen und der männlichen Tanzkursteilnehmer (vorausgesetzt, jede Frau findet einen Tanzpartner)
   ja, unter der Voraussetzung

Notation von Funktionen

Notation

Die Varianten

- $f_1 = \{(0,0),(1,2),(2,4),(4,8),\dots\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $f_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = 2x\}$
- $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f_3(n) := 2n$
- $f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f_4 : n \mapsto 2n$

beschreiben allesamt dieselbe Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, die jeder natürlichen Zahl ihr Doppeltes zuweist.

Gleichheit von Funktionen

Definition (Gleichheit von Funktionen)

Seien X und Y Mengen, seien f und g Funktionen mit dem gleichen Definitionsbereich X und dem gleichen Bildbereich Y.

Wir bezeichnen f und g als **gleich** (in Zeichen: $f \equiv g$), wenn für alle $x \in X$ gilt: $f(x) = g(x)$.

- gleicher Definitionsbereich wegen des Gleichheitsbegriffs für Mengen
- gleicher Bildbereich wegen:

  Beispiel:

  - $f_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \; f_0(n) := n$
  - $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \; f_1(n) := n$

  Beobachtung: Alle Elemente aus $\mathbb{N}$ sind Funktionswerte von f_0, aber nicht alle Elemente aus $\mathbb{Z}$ sind Funktionswerte von f_1. Zum Beispiel gibt es kein $n \in \mathbb{N}$, so dass $f_1(n) = -1$.

Eigenschaften von Funktionen

Definition (surjektiv, injektiv, bijektiv)

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.

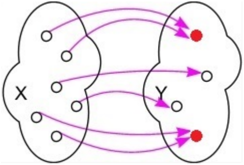
(a) Wir bezeichnen f als *surjektiv*, wenn es für jedes $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

(b) Wir bezeichnen f als *injektiv*, wenn es für jedes $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

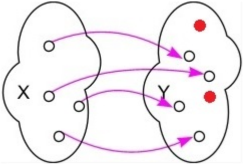
(c) Wir bezeichnen f als *bijektiv*, wenn es für jedes $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

Beobachtung:
f ist genau dann bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

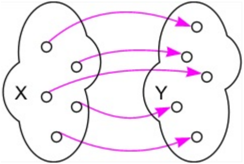
Eigenschaften von Funktionen



(a) surjektive Funktion



(b) injektive Funktion



(c) bijektive Funktion

Abbildung: *Quelle:*
http://de.wikibooks.org/wiki/Mathematik:_Analysis:_Grundlagen:_Funktionen

Eigenschaften von Funktionen

Beispiel: Sind die folgenden Funktionen surjektiv, injektiv, bijektiv?

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := |x|$
  nein, nein, nein
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ g(x) := |x|$
  ja, nein, nein
- $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ g(x) := |x|$
  ja, ja, ja

Beobachtung: Jede nicht-surjektive Funktion lässt sich durch Verkleinerung des Bildbereichs in eine surjektive verwandeln.

Ebenso lässt sich jede Funktion durch Verkleinerung des Definitionsbereichs in eine injektive Funktion verwandeln.

Eigenschaften von Funktionen

Satz

Seien X und Y endliche Mengen.
Es gilt $|X| = |Y|$ genau dann, wenn es eine bijektive Funktion von X nach Y gibt.

Beweistechniken

Wozu Beweise in der Informatik?

... um Aussagen wie

1. “Das Programm erfüllt die gewünschte Aufgabe.”
2. “Das Programm führt zu keiner Endlosschleife.”
3. “Zur Lösung dieser Art von Problemen gibt es kein Patentrezept.”

auf ihren Wahrheitsgehalt zu prüfen, wenn unsere Intuition versagt.

Drei Beweistechniken

1. direkter Beweis
2. Beweis durch Kontraposition
3. Beweis durch Widerspruch

Übersicht

- **direkter Beweis**
- Beweis durch Kontraposition
- Beweis durch Widerspruch

Direkter Beweis

Behauptungen wie

- Wenn eine Zahl durch 10 teilbar ist, dann auch durch 5.
- Die Summe zweier gerader Zahlen, ist gerade.
- Eine Zahl ist genau dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und 3 teilbar ist.
- ...

lassen sich durch die Methode des direkten Beweises zeigen.

Vorgehensweise beim direkten Beweis

Wir leiten *sukessive* und *in logisch nachvollziehbaren Schritten* die Behauptung her.

Dabei benutzen wir:

- Definitionen
- bereits bekannte Ergebnisse
- weitere Voraussetzungen (falls notwendig)

$$p$$
$$\downarrow$$
logische Schlussfolgerungen
$$\downarrow$$
$$q$$

Was brauchen wir?

Beispiel

Die Summe zweier gerader Zahlen ist wiederum eine gerade Zahl.

Definition (gerade Zahl)

Eine Zahl ist genau dann gerade, wenn sie durch 2 teilbar ist.

Definition (Teilbarkeit)

Eine Zahl a ist genau dann durch eine Zahl $b \neq 0$ teilbar, wenn es eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $a = b \cdot k$.

Beweis: Beispiel

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und a, b gerade. Dann sind a und b durch 2 teilbar.

Dann gilt: $a = 2 \cdot l$ und $b = 2 \cdot k$ für $l, k \in \mathbb{Z}$.

Somit gilt: $a + b = 2 \cdot l + 2 \cdot k$.

Sei $m = l + k$, dann gilt: $a + b = 2 \cdot l + 2 \cdot k = 2 \cdot m$ und $m \in \mathbb{Z}$

Somit ist $a + b$ durch 2 teilbar und damit gerade.

$\square$

Beweis Satz 2

Satz

Seien A und B Mengen.
$A = B$ gilt genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gelten.

Definition (Gleichheit, Teilmenge)

Seien M und N Mengen:

- *M und N sind genau dann* **gleich** *(kurz: $M = N$), wenn sie* **dieselben** *Elemente enthalten.*
- *M ist genau dann eine* **Teilmenge** *von N (kurz: $M \subseteq N$), wenn jedes Element von M auch ein Element von N ist.*

Beweis Satz 2

Satz

Seien A und B Mengen.
$A = B$ gilt genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gelten.

Wir müssen **zwei** “Richtungen” zeigen.

1. Wenn $A = B$ gilt, dann gilt $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.
2. Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt, dann gilt auch $A = B$.

$\Longrightarrow$

z.Z: Wenn $A = B$ gilt, dann gilt $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

Es gelte $A = B$.

$\Longrightarrow$ A und B enthalten dieselben Elemente

$\Longrightarrow$ jedes $x \in A$ ist auch $\in B$ und
jedes $x \in B$ ist auch $\in A$

$\Longrightarrow$ es gilt $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$

$\Longleftarrow$

z.Z: Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt, dann gilt auch $A = B$.

Es gelte $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$

$\Longrightarrow$ jedes $x \in A$ ist auch $\in B$ und
jedes $x \in B$ ist auch $\in A$

$\Longrightarrow$ A und B enthalten dieselben Elemente

$\Longrightarrow$ es gilt $A = B$

$\square$

Übersicht

- direkter Beweis
- **Beweis durch Kontraposition**
- Beweis durch Widerspruch

Beweis durch Kontraposition

Beispiel

Wenn a^2 ungerade ist, dann ist a ungerade.

Problem: Es bietet sich kein direkter Beweis an.

Lösung: *Beweis durch Kontraposition*

Zurück zur Wahrheitstafel...

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

Fazit

$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

Beispiel (Planet Zutan)

Wenn der Bewohner rot ist, hat er grüne Haare.
$\equiv$*Wenn der Bewohner keine grünen Haare hat, ist er auch nicht rot.*

Beispiel für einen Beweis durch Kontraposition I

Beispiel

Wenn a^2 ungerade ist, dann ist a ungerade.

Aussage	Negation
a^2 ist eine ungerade Zahl.	a^2 ist eine gerade Zahl.
a ist eine ungerade Zahl.	a ist eine gerade Zahl.

Wir zeigen also:

Satz

Wenn a gerade ist, ist auch a^2 gerade.

Beispiel für einen Beweis durch Kontraposition I

Satz

Wenn a gerade ist, ist auch a^2 gerade.

Beweis:

Sei a eine beliebige **gerade** Zahl.

$\Longrightarrow$ $a = 2 \cdot k$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2^2 \cdot k^2$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2 \cdot 2 \cdot k^2$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2 \cdot l$ mit $l = 2 \cdot k^2$ für eine ganze Zahl k

$\Longrightarrow$ $a^2 = 2 \cdot l$ für eine ganze Zahl l

$\Longrightarrow$ a^2 ist durch 2 teilbar, d.h. a^2 ist gerade.

$\square$

Beweis durch Kontraposition

Ziel: Beweis der Aussage

Satz (1)

Wenn a^2 ungerade ist, dann ist a ungerade.

Direkter Beweis schwierig, daher Beweis der **aussagenlogisch äquivalenten** Aussage:

Satz (2)

Wenn a gerade ist, dann ist a^2 ebenfalls gerade.

Damit haben wir Aussage 1 indirekt bewiesen.

Übersicht

- direkter Beweis
- Beweis durch Kontraposition
- **Beweis durch Widerspruch**

Beispiel für einen Beweis durch Widerspruch I

Beispiel

$\sqrt{2}$ *ist irrational.*

Problem: Wo sind Voraussetzung p und Folgerung q?
atomare Aussage
Weder ein direkter noch ein Beweis durch Kontraposition bieten sich an.

Lösung: Angenommen, $\sqrt{2}$ ist rational.
Wir wollen zeigen, dass das zu einem Widerspruch führt.

$\sqrt{2}$ ist irrational, Beweis durch Widerspruch

Angenommen, $\sqrt{2}$ ist rational.

$\Longrightarrow$ $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$,mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und teilerfremd, d.h. $\text{ggT}(a, b) = 1$

$\Longrightarrow$ $2 = \frac{a^2}{b^2} \Longrightarrow 2 \cdot b^2 = a^2$

$\Longrightarrow$ a^2 ist durch 2 teilbar, da $b^2 \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow$ a ist durch 2 teilbar (bereits bewiesen)

$\Longrightarrow$ $a = 2 \cdot k, k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow$ $2 \cdot b^2 = (2 \cdot k)^2$

$\Longrightarrow$ b^2 ist durch 2 teilbar

$\Longrightarrow$ b ist durch 2 teilbar

$\Longrightarrow$ 2 teilt sowohl a, wie auch b

$\Longrightarrow$ Widerspruch zu a und b sind teilerfremd.

$\Longrightarrow$ $\sqrt{2}$ ist irrational

$\square$

Beweistechniken

- direkter Beweis
  $p \to a_1 \to \cdots \to q$
- Beweis durch Kontraposition
  $\neg q \to a_1 \to \cdots \to \neg p$
- Beweis durch Widerspruch
  $\neg p \to a_1 \to \cdots \to$ Widerspruch (Falsche Aussage)

Worauf man beim Beweisen achten sollte

- Angabe der Beweistechnik am Anfang hilft dem Leser die Idee zu verstehen.
- keine Gedankensprünge im Beweis, nur leicht nachvollziehbare Schlussfolgerungen
- Kennzeichnung am Ende eines Beweises (z.B. durch $\square$)
- Bei längeren Beweisen ist zum Schluss ein kurzer Satz, was gezeigt wurde, hilfreich.

Fragen?

?