# Induktion und Rekursion

Ronja Düffel

WS2018/19

08. Oktober 2018

STARKER START ins Studium

# Der kleine Gauß

# Der kleine Gauß

- **Aufgabe:** addiert die ersten 100 Zahlen zusammen

  berechnet $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$

- **Vermutung:** Für alle natürlichen Zahlen $n$ gilt:

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- **Beweis** durch vollständige Induktion

# Summen und Produkte

## Definition (Summen und Produkte)

*Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebige Zahlen. Dann ist:*

- $\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

  *insbesondere ist die leere Summe:* $\sum_{i=1}^{0} a_i = 0$.
- $\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \ldots a_n$

  *insbesondere ist das leere Produkt:* $\prod_{i=1}^{0} a_i = 1$.

# Vollständige Induktion

## Vollständige Induktion

# Ziel

## Ziel

beweise, dass eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

## Beispiel

*Für alle natürlichen Zahlen n gilt:*

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

# Induktionsprinzip

Schließe vom Besonderen auf das Allgemeine.

1. **Induktionsanfang:** Zeige, dass $A$ für ein, oder einige kleine Werte von $n$ gilt.
2. **Induktionsschritt:** zeige, dass für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: falls $A(n)$ gilt, dann gilt auch $A(n+1)$.

Insbesondere gilt dann

- $A(2)$, wenn $A(1)$ wahr ist,

damit gilt aber auch

- $A(3)$, da $A(2)$ gilt,
- $A(4)$, da $A(3)$ gilt, usw.

**Domino-Effekt**

# kleiner Gauß

## Satz (kleiner Gauß)

*$A(n)$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Induktionsanfang:** $A(1)$

*Behauptung:* Der Satz gilt für $n = 1$.

*Beweis:*

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

# kleiner Gauß

**Satz (kleiner Gauß)**

*$A(n)$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Induktionsschritt:** $A(n) \to A(n+1)$

*Induktionsvoraussetzung:* Es gilt $A(n)$, also $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

*Induktionsbehauptung:* Es gilt $A(n+1)$, also

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

# kleiner Gauß

zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

*Beweis:*

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} &= 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) \\
&= (\sum_{i=1}^{n} i) + (n+1) && \text{Induktionsvoraussetzung anwenden} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \text{erweitern} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} && (n+1) \text{ ausklammern} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}
\end{aligned}
$$

# Warum geht das?

1. Wir haben die Behauptung für ein spezielles $n$ direkt bewiesen
2. Wir haben gezeigt:

   Wenn die Behauptung für ein **beliebiges** $n$ gilt,

   dann gilt sie auch für den Nachfolger $n + 1$.

Damit kann dann für **alle** $n$ argumentiert werden.

# Was kann schiefgehen? (1)

## Beispiel

*Kein Induktionsanfang*

$$A(\text{5 ist durch 2 teilbar}) \rightarrow B(\text{7 ist durch 2 teilbar})$$

- *logisch korrekte Schlussfolgerung*
- *Aussage ist trotzdem falsch, da Voraussetzung nicht gegeben ist.*

# Was kann schiefgehen? (2)

## Beispiel

**Behauptung:** *In einen Koffer passen unendlich viele Socken.*
**Induktionsanfang:** $n = 1$ *In einen leeren Koffer passt ein Paar Socken.*
**Induktionsschritt:** $n \to n + 1$
*Induktionsvoraussetzung: n Paar Socken passen in den Koffer.*
*Induktionsbehauptung:* $n + 1$ *Paar Socken passen in den Koffer.*
*Beweis: n Paar Socken befinden sich im Koffer. Aus Erfahrung weiß man, ein Paar Socken passt immer noch rein.*
$\Rightarrow$ $n + 1$ *Paar Socken passen in den Koffer.*
$\Rightarrow$ *unendlich viele Socken passen in den Koffer.* **????**

# Was kann schiefgehen? (2)

## Beispiel (kein konstruktives Argument im Induktionsschritt)

**Behauptung:** *In einen Koffer passen unendlich viele Socken.*
**Induktionsanfang:** $n = 1$ *In einen leeren Koffer passt ein Paar Socken.*
**Induktionsschritt:** $n \to n + 1$
*Induktionsvoraussetzung:n Paar Socken passen in den Koffer.*
*Induktionsbehauptung:* $n + 1$ *Paar Socken passen in den Koffer.*
*Beweis: n Paar Socken befinden sich im Koffer. Aus Erfahrung weißman, ein Paar Socken passt immer noch rein.*
$\Rightarrow$ $n + 1$ *Paar Socken passen in den Koffer.*
$\Rightarrow$ *unendlich viele Socken passen in den Koffer.* **????**

Konstruktives Argument hätte sagen müssen wo genau die Lücke für das extra Paar Socken ist.

# Was kann schiefgehen? (3)

## Beispiel

**Behauptung:** *Alle Menschen einer Menge $M$ mit $|M| = n$ sind gleich groß.*
**Induktionsanfang:** $n = 1$ *In einer Menge $M$ in der sich nur ein Mensch befindet, sind alle Menschen gleich groß.*
**Induktionsschritt:** $n \to n + 1$
*Sei* $M = \{m_1, \ldots, m_{n+1}\}$, $M' = \{m_1, \ldots, m_n\}$ *und* $M'' = \{m_2, \ldots, m_{n+1}\}$.
$|M'| = |M''| = n \Rightarrow$ *die Menschen in $M'$ und $M''$ sind jeweils gleich groß*
$m_2 \in M'$ *und* $m_2 \in M'' \Rightarrow$ *alle Menschen in $M'$ und $M''$ gleich groß.*
$M = M' \cup M'' \Rightarrow$ *alle Menschen in $M$ sind gleich groß.*

# Was kann schiefgehen? (3)

## Beispiel (fehlerhafte Induktion)

**Behauptung:** *Alle Menschen einer Menge $M$ mit $|M| = n$ sind gleich groß.*
**Induktionsanfang:**$n = 1$ *In einer Menge $M$ in der sich nur ein Mensch befindet, sind alle Menschen gleich groß.*
**Induktionsschritt:**$n \to n + 1$
*Sei $M = \{m_1, \dots, m_{n+1}\}$, $M' = \{m_1, \dots, m_n\}$ und $M'' = \{m_2, \dots, m_{n+1}\}$.*
*$|M'| = |M''| = n \Rightarrow$ die Menschen in $M'$ und $M''$ sind jeweils gleich groß.*
*$m_2 \in M'$ und $m_2 \in M'' \Rightarrow$ alle Menschen in $M'$ und $M''$ gleich groß.*
*$M = M' \cup M'' \Rightarrow$ alle Menschen in $M$ sind gleich groß.*

Induktionsschritt scheitert bei $n = 1$, da $M' = \{m_1\}$ und $M'' = \{m_2\}$.

STARKER START ins Studium

# Wann anwendbar?

- Beweis von Aussagen, die sich auf Objekte beziehen, die als natürliche Zahlen betrachtet werden können.
  z.B. Geraden, Spielzüge, Menschen, Socken...

- es muss sich $A(n+1)$ aus $A(n)$ folgern lassen.

- Aussagen über rekursiv definierte Mengen oder Funktionen.

# Rekursion

## Rekursion

# Rekursion

## Definition

*Eine rekursive Funktion ist eine Funktion, die durch sich selbst definiert wird.*
*Rekursionsanfang: Fall (Fälle) für den (die) die Funktion nicht wieder selbst aufgerufen wird*
*Rekursionsschritt: rekursiver Aufruf der Funktion.*

## Beispiel (Fakultätsfunktion)

$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

# Fakultätsfunktion

$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(1) &= 1 \cdot f(0) = 1 \cdot 1 = 1 \\ f(2) &= 2 \cdot f(1) = 2 \cdot (1 \cdot f(0)) = 2 \cdot (1 \cdot 1) = 2 \\ f(3) &= 3 \cdot f(2) = 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 1)) = 6 \end{aligned}$$

Man schreibt auch $f(n) = n!$

**Satz**

*Für die Fakultätsfunktion $f(n)$ gilt: $f(n) = \prod_{i=1}^{n} i$.*

**Beweis** durch vollständige Induktion

**Induktionsanfang:** $n = 0$

*Behauptung:* Der Satz gilt für $n = 0$.

*Beweis:* Es gilt: $f(0) = 1$. Ferner gilt: $\prod_{i=1}^{0} i = 1$.
Somit gilt: $f(0) = 1 = \prod_{i=1}^{0} i$.

**Induktionsschritt:** $n \to n + 1$

*Induktionsvoraussetzung:* Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f(n) = \prod_{i=1}^{n} i$.

*Induktionsbehauptung:* Es gilt: $f(n+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i$.

*Induktionsbehauptung:* Es gilt: $f(n+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i$.

*Beweis:*

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= (n+1) \cdot f(n) && \text{Induktionvoraussetzung} \\
&= (n+1) \cdot \prod_{i=1}^{n} i \\
&= (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \\
&= \prod_{i=1}^{n+1} i
\end{aligned}$$

$\square$

# Sind wir fertig?

1. Wir haben die Behauptung für $n = 0$ gezeigt.
2. Wir haben gezeigt:

   **Wenn** die Behauptung für $n$ gilt, **dann** gilt sie auch für $n + 1$.

   **wichtig:** Verwendung der Induktionsvoraussetzung

# ideale Kaninchen

- Ein Kaninchenpaar (m,w)
- ist nach einem Monat geschlechtsreif
- gebären nach einem Monat Tragzeit ein weiteres Kaninchenpaar
- Kaninchen sterben nie
- Wie viele Kaninchenpaare nach $n$ Monaten ($KP_n$)?

# Karnickel

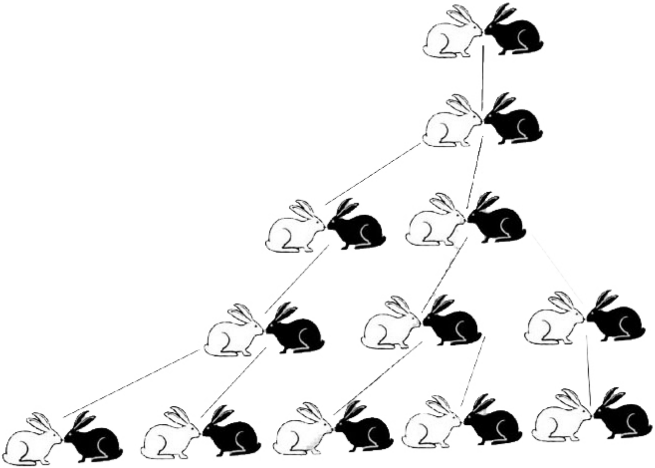
1. Monat $\rightarrow$ 1 Paar

2. Monat $\rightarrow$ 1 Paar

3. Monat $\rightarrow$ 2 Paare

4. Monat $\rightarrow$ 3 Paare

5. Monat $\rightarrow$ 5 Paare



# Karnickel

Wie viele (ideale) Kaninchenpaare $K_n$ habe ich nach $n$ Monaten?

- Die Kaninchen sterben nie

$$K_n = K_{n-1} + \text{ die Neugeborenen}$$

- ab dem zweiten Lebensmonat, jeden Monat ein neues Paar
  $\rightarrow$ alle Paare, die mindestens 2 Monate alt sind, bekommen Nachwuchs
  $\rightarrow$ Anzahl der Neugeborenen in Monat $n$: $K_{n-2}$

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-2}$$

# Türme von Hanoi

**Regeln:**

- nur eine Scheibe bewegen
- niemals eine größere auf eine kleinere Scheibe legen.

# Algorithmus Türme von Hanoi

## Algorithmus

```
function hanoi(n, start, ziel, hilf){
    if (n > 1){
        hanoi(n-1,start,hilf,ziel)
    }
    verschiebe Scheibe n von start auf ziel
    if (n > 1){
        hanoi(n-1,hilf,ziel,start)
    }
}
```

# Anzahl der Spielzüge

| | | |
|---|---|---|
| $n = 1$ | Schiebe 1 von A nach B | 1 Zug |
| $n = 2$ | $1 \curvearrowright$ C, $2 \curvearrowright$ B, $1 \curvearrowright$ B | 3 Züge |
| $n = 3$ | $1 \curvearrowright$ B, $2 \curvearrowright$ C ,$1 \curvearrowright$ C, $3 \curvearrowright$ B, $1 \curvearrowright$ A, $2 \curvearrowright$ B, $1 \curvearrowright$ B | 7 Züge |

**Satz**

*Um n Scheiben von einem Stapel zu einem anderen zu transportieren, werden mindestens $2^n - 1$ Spielzüge benötigt.*

# Beweis Anzahl der Spielzüge

**Induktionsanfang:** $n = 1$

*Behauptung:* Um eine Scheibe von A nach B zu setzen, werden $2^1 - 1 = 1$ Spielzüge benötigt.

*Beweis:* offensichtlich korrekt, wir setzen die Scheibe von A nach B.

**Induktionsschritt:** $n \to n + 1$

*Induktionsvoraussetzung:* Um $n$ Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^n - 1$ Spielzüge benötigt.

*Induktionsbehauptung:* Um $n + 1$ Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^{n+1} - 1$ Spielzüge benötigt.

# Beweis Anzahl der Spielzüge

*Induktionsbehauptung:* Um $n+1$ Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^{n+1}-1$ Spielzüge benötigt.

*Beweis:*

1. transportiere $n$ Scheiben von start auf hilf
2. transportiere Scheibe $n+1$ von start auf ziel
3. transportiere $n$ Scheiben von hilf auf ziel

$$2^n - 1 + 1 + 2^n - 1 = 2^n + 2^n - 1 + 1 - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

$\square$

# Turm von Benares

- bei 64 Scheiben, benötigen die Mönche $2^{64}$ Züge
- bei 1 Zug pro Sekunde sind das 18 446 744 073 709 551 615 Sekunden
- das entspricht 584 942 417 400 Jahren

# Fragen?

?