



Übungszettel 5a - Induktion und Rekursion

Aufgabe 1: Quiz Summen und Produkte

1.

1. Welche(r) Term(e) ergeben 14?

- a) $\sum_{i=2}^5 i$
- b) $\sum_{i=1}^3 (2^i - 1)$
- c) $\sum_{i=0}^3 (5 - i)$

2. Welche(r) Term(e) ergeben 7?

- a) $\sum_{i=1}^7 i$
- b) $\sum_{i=3}^4 (2i - i)$
- c) $\sum_{i=1}^7 1$

3. Welche(r) Term(e) ergeben 15?

- a) $\prod_{i=0}^1 \prod_{j=0}^2 (2j + i)$
- b) $\prod_{i=0}^1 \sum_{j=0}^2 (2j + i)$
- c) $\sum_{i=0}^1 \prod_{j=0}^2 (2j + i)$

Solution:

- 1. a und c ergeben beide 14
- 2. b und c ergeben beide 7
- 3. a ergibt 0, b ergibt 54 und c ergibt 15.

Aufgabe 2: Quiz Rekursion

Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ terminieren immer?

Hinweis: \mathbb{N}_0 bezeichnet die natürlichen Zahlen inklusive der 0.

(a)

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 1, & \text{falls } n = 1 \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst} \end{cases}$$

(b)

$$f(n) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ f(n-1) + f(n-2), & \text{sonst} \end{cases}$$

(c)

$$f(n) := \begin{cases} 5, & \text{falls } n = 1 \\ 3 + f(n/2), & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 5 + f(n+1), & \text{sonst} \end{cases}$$

Solution:

- (a) ja, terminiert für alle $n \in \mathbb{N}$
- (b) nein terminiert nicht, da $f(n - 2)$ für ungerade n den Basisfall nicht trifft. Außerdem ist $f(n - 2)$ für $n = 1$ nicht mehr definiert, da das dann $f(-1)$ wäre und die Funktion nur für $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definiert ist.
- (c) terminiert für alle außer $n = 0$. Wäre zu retten, wenn man einen Basisfall für $n = 0$ angibt.

Aufgabe 3: Ungerade Zahlen

Summiert man die ersten ungeraden Zahlen, so erhält man *anscheinend* stets eine Quadratzahl:

$$\begin{array}{rclclcl} 1 & = & 1 & = & 1^2 \\ 3 + 1 & = & 4 & = & 2^2 \\ 5 + 3 + 1 & = & 9 & = & 3^2 \\ 7 + 5 + 3 + 1 & = & 16 & = & 4^2 \\ 9 + 7 + 5 + 3 + 1 & = & 25 & = & 5^2 \end{array}$$

Diesen Umstand sollen Sie in allgemeiner Form beweisen (s.u.). Hierzu ein paar Erläuterungen:

Eine *gerade* Zahl lässt sich in der Form $2 \cdot n$ schreiben mit $n \in \mathbb{N}$.

Eine *ungerade* Zahl lässt sich in der Form $2 \cdot n + 1$ schreiben mit $n \in \mathbb{N}$.

In den obigen fünf Summen gilt: Ist der letzte Summand die Zahl $2n + 1$, so ist der Wert der Summe $(n + 1)^2$. In der letzten Beispielzeile wird bis $9 = 2 \cdot 4 + 1$ summiert und die Summe ergibt $(4 + 1)^2 = 5^2$.

Achtung: Dies alles ist nur eine Erläuterung der zu beweisenden Formel. Wir haben noch keinen Beweis für die allgemeine Formel geführt!

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^n (2i + 1) = (n + 1)^2$$

Solution: Induktionsanfang: $n = 0$

$$\sum_{i=0}^0 (2i + 1) = (2 \cdot 0 + 1) = 0 + 1 = 1 = 1^2 = (0 + 1)^2$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein n mit $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{i=0}^n (2i + 1) = (n + 1)^2$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Zu zeigen ist:

$$\sum_{i=0}^{n+1} (2i + 1) = ((n + 1) + 1)^2$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} (2i + 1) &= \sum_{i=0}^n (2i + 1) + (2(n + 1) + 1) && \text{letzten Summanden abkoppeln} \\ &= (n + 1)^2 + 2(n + 1) + 1 && \text{Induktionsvoraussetzung benutzen} \\ &= (n + 1)^2 + 2 \cdot (n + 1) \cdot 1 + 1^2 && \text{Umformungen binomische Formel} \\ &= ((n + 1) + 1)^2 && \text{binomische Formel mit } a = (n + 1) \text{ und } b = 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Induktive Argumentation

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Beweise durch induktive Argumentation folgende Aussage:
 n Elemente lassen sich auf $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ Arten anordnen.

Solution: Induktionsanfang: $n = 1$

1 Element lässt sich auf eine Art anordnen: $1 = 1!$.

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Induktionsvoraussetzung: n Elemente lassen sich auf $n!$ Arten anordnen.

Induktionsbehauptung: $n + 1$ Elemente lassen sich auf $(n + 1)!$ Arten anordnen.

Gegeben seien die Elemente $e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}$. Für die $n + 1$ Elemente stehen $n + 1$ Positionen zur Verfügung. Das Element e_{n+1} kann auf jeder dieser Positionen stehen. Nehmen wir also an, es stehe auf einer beliebigen Position x . Dann gibt es für die restlichen n Elemente laut Induktionsvoraussetzung noch $n!$ Möglichkeiten auf die restlichen n Positionen verteilt zu sein. Insgesamt gibt es also für alle $n + 1$ Elemente $(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$ verschiedene Arten angeordnet zu sein. \square

Aufgabe 5: Rekursion und Induktion

n Personen treffen sich und jede schüttelt jeder anderen einmal die Hand. Wie viele Händedrücke gibt das? Löse das Problem rekursiv.

Solution: Offensichtlich kommt am Ende $\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}$ raus, denn jedes Händeschütteln erzeugt eine zweielementige Teilmenge. Wenn jeder mit jedem eine Teilmenge bildet, dann ist die Anzahl der 2-elementigen Teilmengen gesucht.

Wichtig ist aber der Lösungsweg und außerdem soll das Problem rekursiv gelöst werden.

Also, wie viele Händedrücke $H(n)$ gibt es, wenn sich n Personen die Hände schütteln? $n = 1$ Person kann mit niemandem Hände schütteln $H(1) = 0$, $n = 2$ Personen können sich die Hand schütteln $H(2) = 1$, $n = 3$ Personen ich kann jedem der beiden andern die Hand schütteln, und die zwei können noch untereinander die Hände schütteln, also $H(3) = 3$. Bei $n = 4$ Personen,ich kann wieder allen anderen $(n - 1)$ Personen die Hand schütteln und dann können diese $(n - 1)$ Personen sich noch untereinander die Hände schütteln. Also gilt für n Personen:

$$H(n) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 1 \\ (n - 1) + H(n - 1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

So, jetzt ist die Frage was die geschlossene Form dieser Rekursionsgleichung ist.

$$\begin{aligned} H(1) &= 0 \\ H(2) &= 1 + 0 \\ H(3) &= 2 + 1 + 0 \\ H(4) &= 3 + 2 + 1 + 0 \\ H(5) &= 4 + 3 + 2 + 1 + 0 \\ &\vdots \\ H(i) &= (i - 1) + (i - 2) + \dots + 1 + 0 \end{aligned}$$

Vermutung:

$$H(n) = \sum_{i=0}^{n-1} i$$

Jetzt hilft der kleine Gauß ($\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$), den wir in der Vorlesung auch gemacht haben. Überträgt man das auf unsere Vermutung käme demnach raus, $H(n) = \frac{(n-1)n}{2}$.

Beweis durch vollständige Induktion:

$n = 1$:

$$H(1) = 0 = 0 \cdot 1 = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$$

Induktionsschritt:

Annahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ gilt: $H(n) = \frac{(n-1)n}{2}$

z.Zg. Dann gilt: $H(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$

$$H(n+1) = n + H(n)$$

Definition von $H(n)$

$$= n + \frac{(n-1)n}{2}$$

Induktionsannahme

$$= \frac{2n}{2} + \frac{(n-1)n}{2}$$

Erweitern auf 2

$$= \frac{2n + n^2 - n}{2}$$

ausmultipliziert

$$= \frac{n^2 + n}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

□

Viel Erfolg!