



# Übungszettel 3a - Relationen und Funktionen mathematische Beweise

## Aufgabe 1: Funktionen: Definitions- und Bildbereich

Zeichne den Graphen zu

- (a)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) := x^2$
- (b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^2$
- (c)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^2$

## Aufgabe 2: Kartesisches Produkt

Es gibt drei Wege von Sparta nach Korinth und fünf Wege von Korinth nach Athen. Sei  $X$  die Menge der Wege von Sparta nach Korinth und  $Y$  die Menge der Wege von Korinth nach Athen. Alle Wege von Sparta nach Athen führen über Korinth.

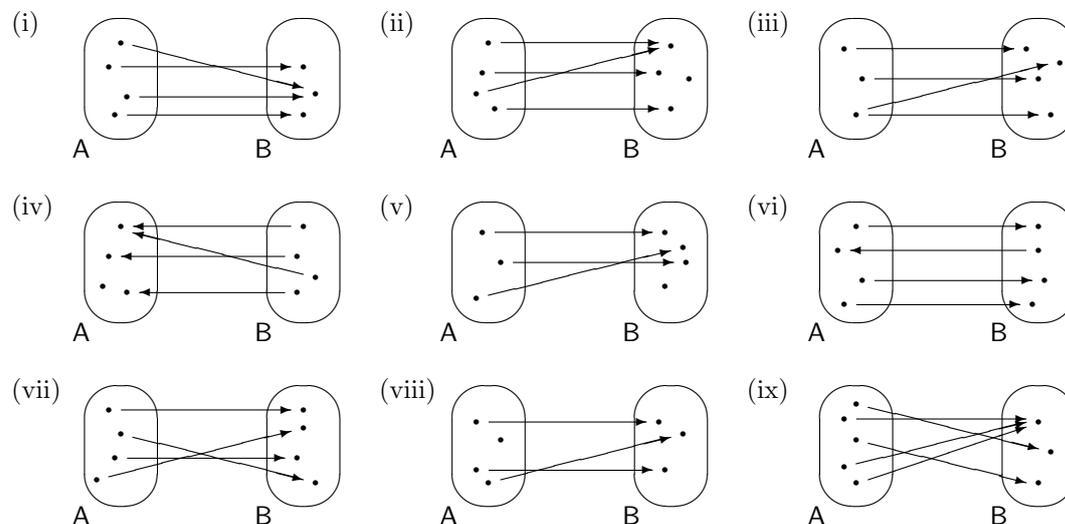
- (a) Was beschreibt  $X \times Y$ ?
- (b) Was beschreibt  $|X \times Y|$ ?
- (c) Zeichnungen und graphische Darstellungen sind oft hilfreich, um Ideen zu bekommen, und auch um sich Regeln zu merken.

Entwirf eine graphische Darstellung aller Wege von Sparta nach Athen!

## Aufgabe 3: Injektiv, surjektiv, bijektiv

Eine Funktion ist gegeben durch einen Definitionsbereich  $A$ , einen Bildbereich  $B$  und eine Vorschrift, die jedem Element von  $A$  in eindeutiger Weise ein Element von  $B$  zuordnet.

Interpretiere folgende Bilder als Relationen und beschreibe sie mit Begriffen aus den Vorlesungen. Handelt es sich um eine Funktion? Wenn ja, ist es eine surjektive Funktion? Ist sie injektiv? Ist sie bijektiv?



#### Aufgabe 4: Zuordnungsvorschriften

Stelle fest, ob die folgenden Vorschriften Zuordnungsvorschriften von Funktionen sind, und prüfe ggf., ob die Funktionen injektiv sind:

- (a) Jedem Einwohner Münchens wird sein Nachname zugeordnet.
- (b) Jedem Einwohner der Bundesrepublik Deutschland, der einen rechten Daumen besitzt, wird der Fingerabdruck desselben zugeordnet.
- (c) Jedem Patienten eines Krankenhauses wird seine Größe oder sein Gewicht zugeordnet.
- (d) Jedem angemeldeten PKW in der Bundesrepublik Deutschland wird sein KfZ-Kennzeichen zugeordnet.
- (e) Jedem  $x \in [-1, 1]$  wird eine Lösung der Gleichung  $x^2 + y^2 = 1$  zugeordnet.

#### Aufgabe 5: Direkter Beweis

Betrachte den folgenden Satz

**Satz 1** Wenn eine Zahl durch 42 teilbar ist, dann ist sie auch durch 14 teilbar.

Beweise, dass die Aussage stimmt. Die folgenden Schritte können bei der Lösung helfen, müssen aber nicht alle ausgeführt werden.

- (a) Wie lauten die Annahme und die Behauptung?
- (b) Nenne alle Zahlen zwischen -100 und 100, die durch 42 oder durch 14 teilbar sind.
- (c) Welche Beobachtung triffst du in Aufgabeteil (b)?
- (d) Welche der folgenden Zahlen sind durch 42 teilbar? Verifiziere deine Antwort, indem du eine ganze Zahl  $k$  findest, sodass  $a = 42 \cdot k$ .

33 84 462 540 - 728

- (e) Welche der folgenden Zahlen sind durch 14 teilbar? Verifiziere deine Antwort, indem du eine ganze Zahl  $k$  findest, sodass  $a = 14 \cdot k$ .

33 84 462 540 - 728

- (f) Sei  $a$  eine Zahl, die durch 42 teilbar ist. Welche Form hat die Zahl nach der Definition der Teilbarkeit? (Skript S.125)
- (g) Sei  $a$  eine Zahl, die durch 14 teilbar ist. Welche Form hat die Zahl nach der Definition der Teilbarkeit? (Skript S.125)
- (h) Gib atomare Aussagen an, sodass die Implikationsfolge  $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$  erfüllt ist.
- (i) Gib für jeden Zwischenschritt in deiner obigen Implikationsfolge eine Begründung an.
- (j) Beweise den obigen Satz, d.h. zeige, dass jede Zahl, die durch 42 teilbar ist auch durch 14 teilbar ist.

#### Aufgabe 6: Beweis durch Widerspruch

Beweise:  $a + b$  ist durch 7 teilbar, wenn  $a$  und  $b$  durch 7 teilbar sind durch Widerspruch.

Folgende Überlegungen können hilfreich sein.

- (a) Wie lautet die Voraussetzung  $A$  und die Folgerung  $B$ ?
- (b) Wie lautet die Negation von  $B$ ?
- (c) Welche Form hat eine Zahl, die durch 7 teilbar ist?
- (d) Finde Zwischenaussagen, sodass die Implikationsreihenfolge  $(A \text{ und } \neg B) \Rightarrow A_1 \dots A_n \Rightarrow F$  gilt, wobei  $F$  eine falsche Aussage darstellt.
- (e) Begründe die Schritte, die jeweils zur nächsten Zwischenaussage führen.

### Aufgabe 7: Kontraposition

Sei  $a \in \mathbb{Z}$ .

Beweise: *Wenn  $a^{32}$  eine ungerade Zahl ist, dann ist  $a^4$  ebenfalls eine ungerade Zahl.*

Folgende Überlegungen können hilfreich sein.

- (a) Wie lautet die Voraussetzung  $A$  und die Folgerung  $B$ ?
- (b) Wie lauten die Negation von  $A$  und  $B$ ?
- (c) Welche Form hat eine Zahl, die gerade ist?
- (d) Finde Zwischenaussagen, sodass die Implikationsreihenfolge  $\neg B \Rightarrow A_1 \cdots A_n \Rightarrow \neg A$  gilt.
- (e) Begründe die Schritte, die jeweils zur nächsten Zwischenaussage führen.

### Aufgabe 8: Äquivalenzen

Seien  $x, y \in \mathbb{N}$ . Beweise bzw. widerlege, welche der folgenden drei Äquivalenzen gelten.

- (a)  $x \cdot y$  ungerade  $\stackrel{?}{\Leftrightarrow}$   $x$  und  $y$  ungerade
- (b)  $x \cdot y$  gerade  $\stackrel{?}{\Leftrightarrow}$   $x$  und  $y$  gerade
- (c)  $x \cdot y$  gerade  $\stackrel{?}{\Leftrightarrow}$   $x$  oder  $y$  gerade

Viel Erfolg!