Vorsemesterkurs Informatik

Ronja Düffel & Alexander Kampf

WS 2019/2020

23. September 2019

Theoretische Informatik

Wieso, weshalb, warum ??!?

Informatiker*innen = Programmierer*innen

nicht ganz!

Wieso, weshalb, warum ??!?

1. Modellieren und Formalisieren von Problemen und Lösungen
2. Verifikation (Beweis der Korrektheit)

Quelle:http://www.capcomespace.net

Überblick

- heute (23.9.):
  - Aussagenlogik
  - Mengen
- Mittwoch (25.9.):
  - Relationen und Funktionen
  - Beweistechniken
- Freitag (27.9.):
  - Induktion und Rekursion

Aussagenlogik

Was ist das?

- Lehre des vernünftigen Schlussfolgerns
- Beschäftigt sich u.a. mit der Frage:
  - Wie kann man Aussagen miteinander verküpfen?
  - Auf welche Weise kann man formale Schlüsse ziehen und Beweise durchführen?

Warum ist das wichtig?

- Modellierung von Wissen (z.B. künstliche Intelligenz)
- Auswertung von Datenbankanfragen
- Kontrollfluss von Computerprogrammen (`if-then-else`-Konstrukte)
- Logikbausteine in der technischen Informatik (Hardware)
- Verifikation von
  - Schaltkreisen
  - Programmen
  - Protokollen (Kommunikation zwischen Systemen z.B. Internetbanking)

logische Aussagen

Definition (Aussage)

Eine **logische Aussage** *(kurz* **Aussage***) ist ein Satz oder Ausdruck, der entweder wahr (1) oder falsch (0) sein kann.*
0 *und* 1 *werden auch* **Wahrheitswerte** *genannt.*

zum Beispiel:

- Die Sonne scheint.
- Eine Zahl a ist durch 3 teilbar.
- $3 > 7$
- Wenn der Bewohner rot ist, dann hat er grüne Haare.
- Jede gerade Zahl die größer als 2 ist, ist die Summe zweier Primzahlen (Goldbach Vermutung)

logische Aussagen

keine logischen Aussagen sind dagegen:

- $1 + 2$, es kann kein Wert (wahr oder falsch) zugeordnet werden.
- 2 ist eine kleine Zahl ("klein" ist für Zahlen nicht definiert.)
- Aufforderungen und Fragen ("Komm her!") ("Was machen wir?")
- „Dieser Satz ist falsch.“, da dieser Satz weder wahr noch falsch sein kann

atomare Aussagen

atomare Aussagen sind Aussagen, die nicht weiter zerlegt werden können.

Beispiel

Wenn die Sonne scheint, dann gehe ich an den Strand und sonne mich.

Wenn *die Sonne scheint,* **dann** *gehe ich an den Strand* **und** *sonne mich.*

atomare Aussagen:

> *A:= „Die Sonne scheint“*
> *B:= „Ich gehe an den Strand“*
> *C:= „Ich sonne mich“*

$$\varphi = (A \to (B \land C))$$

Syntax der Aussagenlogik

Die **Syntax** legt fest, welche Zeichenketten (Worte) Formeln der Aussagenlogik sind

Definition (Syntax der Aussagenlogik)

i) *Jede atomare Aussage ist eine aussagenlogische Formel (aF)*

ii) **0** *ist eine aussagenlogische Formel (aF)*

iii) **1** *ist eine aussagenlogische Formel (aF)*

Rekursive Regeln

iv) *Wenn* φ *eine aF ist, dann ist auch* $\neg\varphi$ *eine aF.*

v) *Wenn* φ *eine aF ist und* ψ *eine aF ist, dann sind*

- $(\varphi \wedge \psi)$,
- $(\varphi \vee \psi)$,
- $(\varphi \rightarrow \psi)$,
- *und* $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ *ebenfalls aussagenlogische Formeln.*

Semantik der Aussagenlogik

Die **Semantik** legt fest, welche *Bedeutung* einzelne Formeln haben.

Definition (Negation, $\neg$)

Die Formel $\neg A$ (bedeutet: "nicht A") ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Beispiel (Frage 21)

A:=„Alle Kinder spielen gern.“

a) *Kein Kind spielt gern.*

b) *Alle Kinder spielen nicht gern.*

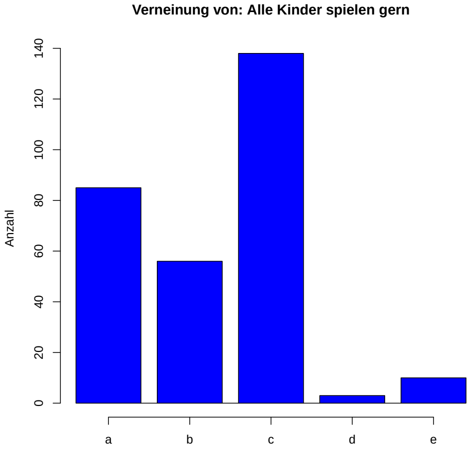
c) *Nicht alle Kinder spielen gern.*

d) *Alle Kinder hassen Spiele.*

¬A:=„Nicht alle Kinder spielen gern.“
Wahrheitstabelle:

A	$\neg A$
0	1
1	0

Anmeldung


Verneinung von: Alle Kinder spielen gern
Anzahl
0
20
40
60
80
100
120
140
a
b
c
d
e

Konjunktion

Definition (Konjunktion, $\wedge$)

Die Formel $(A \wedge B)$ (bedeutet: "A und B") ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr ist.

Beispiel

Der Bewohner ist rot **und** *er hat grüne Haare.*

Wahrheitstafel:

A	B	$(A \wedge B)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjunktion

Definition (Disjunktion, $\vee$)

Die Formel $(A \vee B)$ (bedeutet: "A oder B") ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen A oder B wahr sind.

Wahrheitstafel:

A	B	$(A \vee B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Implikation

Definition (Implikation, $\rightarrow$)

Die Formel $(A \rightarrow B)$ (bedeutet: "Wenn A dann B") ist genau dann wahr, wenn A falsch ist, oder sowohl Aussage A, als auch Aussage B wahr ist.

Wahrheitstafel:

A	B	$(A \rightarrow B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Beispiel:
Wenn alle ungeraden Zahlen Primzahlen sind, dann ist 7 eine Primzahl.

Beispiel:
$\underbrace{\text{Wenn alle ungeraden Zahlen Primzahlen sind}}_{A}$, $\underbrace{\text{dann ist 7 eine Primzahl}}_{B}$.

Biimplikation

Definition (Biimplikation, $\leftrightarrow$)

Die Formel $(A \leftrightarrow B)$ (bedeutet: "A genau dann wenn B") ist genau dann wahr, wenn Aussagen A und B beide falsch oder beide wahr ist.

Wahrheitstafel:

A	B	$(A \leftrightarrow B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Beispiel

Jeder bekommt einen Sitzplatz **genau dann, wenn** *es höchstens so viele Interessenten wie Sitzplätze gibt.*

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit

Definition (Erfüllbarkeit)

Eine aussagenlogische Formel φ heißt **erfüllbar***, wenn es (mindestens) eine Belegung der Variablen gibt, sodass die Formel den Wahrheitswert 1 hat.*

z.B. $(A \wedge B)$

Definition (Unerfüllbarkeit)

φ heißt **unerfüllbar***, wenn es* **keine** *erfüllende Belegung gibt.*

z.B. $(A \wedge \neg A)$

Definition (Allgemeingültigkeit)

φ heißt **allgemeingültig** *(auch* **Tautologie***), wenn φ für* **jede** *Belegung den Wahrheitswert 1 annimmt.*

z.B. $(A \vee \neg A)$

Äquivalenz

Definition

Zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ heißen **äquivalent** *($\equiv$), wenn die Wahrheitswerte für* **alle** *passenden Belegungen für φ und ψ identisch sind.*

Beispiel

Für $\varphi = (\neg A \vee B)$ und $\psi = (A \rightarrow B)$ gilt: $\varphi \equiv \psi$
Wahrheitstafel:

A	B	$\neg A$	φ $(\neg A \vee B)$	ψ $(A \rightarrow B)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Frage 22

Wenn der Bewohner rot ist, **dann** hat er grüne Haare.

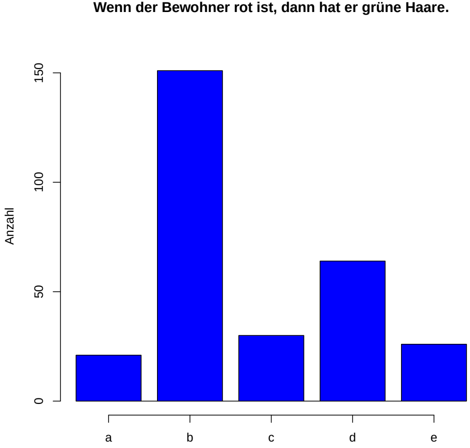
a) Wenn der Bewohner nicht rot ist, dann hat er keine grünen Haare.

b) Wenn der Bewohner keine grünen Haare hat, dann ist er nicht rot.

c) Wenn der Bewohner grüne Haare hat, dann ist er rot.

d) Alle sind richtig

Anmeldung


Wenn der Bewohner rot ist, dann hat er grüne Haare.
Anzahl
0
50
100
150
a
b
c
d
e

Mengen

Wieso, weshalb, warum?

- Wir wollen:
  - allgemeingültige Aussagen treffen.
  - "allgemeingültige" Lösungen finden.
- Wir benötigen die Möglichkeit:
  - Objekte/Konzepte zusammenzufassen
  - anhand relevanter Eigenschaften gruppieren
  - beweisbare Aussagen treffen
- gibt es in vielen Programmiersprachen als Datentyp/Container (`set`)

Mengen

Definition (Menge (nach CANTOR))

Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche „Elemente der Menge M“ genannt werden, zu einem Ganzen.

zum Beispiel:

- die Menge aller natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$
- die Menge aller Vorkursteilnehmer
- die Menge aller Bücher in der Informatikbibliothek
- die Menge aller aussagenlogischen Formeln

Frage 13

Was ist in einer Menge wichtig?

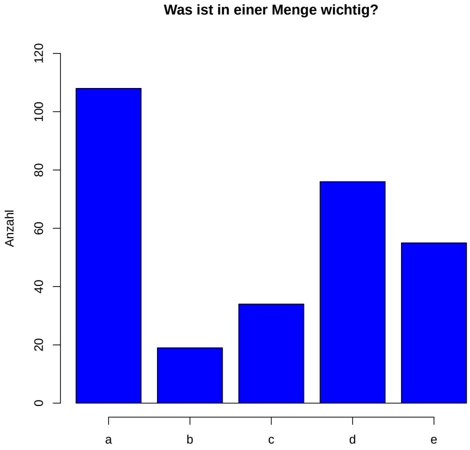
a) Das Vorhandensein der Elemente

b) Die Reihenfolge der Elemente

c) Die Häufigkeit des Auftretens der Elemente

d) Alle drei der oben genannten Eigenschaften

Anmeldung


Was ist in einer Menge wichtig?
Anzahl
0
20
40
60
80
100
120
a
b
c
d
e

Beschreibung bzw. Definition

Notation:

$$m \in M \quad :\Leftrightarrow \quad m \text{ ist Element der Menge } M.$$
$$m \notin M \quad :\Leftrightarrow \quad m \text{ ist kein Element der Menge } M.$$

- *extensional*, aufzählen der Elemente
  z.B. $M_1 := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$
- *intensional*, Angabe von charakteristischen Eigenschaften der Elemente
  z.B. $M_1 := \{x | x \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq 7\}$

Definition (leere Menge)

Die **leere Menge** $\emptyset$ *ist die Menge, die kein(e) Element(e) enthält.* $\emptyset = \{\}$

Beachte:

$$\emptyset \neq \{\emptyset\}$$

Eigenschaften

- Alle Elemente einer Menge sind **verschieden**. D.h. kein Wert kann "mehrfach" vorkommen.
- Elemente einer Menge haben **keine** feste Reihenfolge.
- Eine Menge M kann auf verschiedenen Arten beschrieben werden

  z.B:

$$\begin{aligned} M &= \{1,3,5,7\} \\ &= \{3,5,7,1\} \\ &= \{1,1,5,3,5,7\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 7, x \text{ ist ungerade}\} \end{aligned}$$

- Mengen können auch "verschiedenartige" Elemente enthalten
  z.B.: $M = \{7, Haus, (Herz, 3), -4, \{l, m, n\}, 9\}$

Russel'sche Antinomie

Beispiel

Sei A die Menge aller Mengen B, die sich selbst nicht enthalten,
$A := \{B | B \text{ ist eine Menge}, B \notin B\}$

Frage: Ist die Menge A in sich selbst enthalten?

$A \in A$: nach Def. von A gilt dann aber $A \notin A$ ↯

$A \notin A$: nach Def. von A gilt dann aber $A \in A$ ↯

Wir vermeiden Mengen mit Selbstreferenz und arbeiten weiter mit Cantors Mengenbegriff

Mengenalgebra I

Definition (Gleichheit, Teilmenge, Obermenge)

Seien L und M Mengen.

- *L und M sind genau dann* **gleich** *(kurz: $L = M$), wenn sie* **dieselben** *Elemente enthalten.*
- *L ist genau dann eine* **Teilmenge** *von M (kurz: $L \subseteq M$), wenn jedes Element von L auch ein Element von M ist.*
- *L ist genau dann eine* **echte Teilmenge** *von M (kurz: $L \subset M$), wenn jedes Element von L auch ein Element von M ist, aber nicht jedes Element von M auch ein Element von L (kurz: $L \subseteq M$ und $L \neq M$).*
- *L ist genau dann eine* **Obermenge** *von M ($L \supseteq M$), wenn M eine Teilmenge von L ist (kurz: $M \subseteq L$).*

Satz 1

Satz

Seien K, L und M Mengen, für die $K \subseteq L$ und $L \subseteq M$ gilt. Dann gilt auch $K \subseteq M$.

Beispiel

Sei $K = \{Stein, Schere, Papier\}$, $L = \{Stein, Schere, Papier, Eidechse\}$ und $M = \{Stein, Schere, Papier, Eidechse, Spock\}$.
Dann gilt:

- $K \subseteq L$
- $L \subseteq M$
- $K \subseteq M$

Satz 2

Satz

Seien L und M Mengen. $L = M$ gilt genau dann, wenn $L \subseteq M$ und $M \subseteq L$ gelten.

Beispiel

- *Sei $L = \{3, 4, 5\}$ und $M = \{3, 4, 5\}$. Dann ist:*

  $L = M$ *und* $L \subseteq M$ *und*
  $M \subseteq L$
- *Sei $L = \{3, 4, 5\}$ und $M = \{3, 4\}$. Dann ist:*

  $M \subseteq L$ *und* $L \not\subseteq M$ *und* $L \neq M$

Mengenalgebra II

Definition (Schnitt, Vereinigung, Differenz...)

Seien L und M Mengen.

- *Der* **Schnitt** *von L und M ist die Menge*
$$L \cap M := \{x | x \in L \text{ und } x \in M\}.$$
- *Die* **Vereinigung** *von L und M ist die Menge*
$$L \cup M := \{x | x \in L \text{ oder } x \in M\}.$$
- *Die* **Differenz** *von L und M ist die Menge*
$$L \setminus M := \{x | x \in L \text{ und } x \notin M\}.$$
- *L und M heißen* **disjunkt**, *wenn sie kein gemeinsames Element enthalten (kurz: $L \cap M = \emptyset$).*

Mächtigkeiten

Definition

- *Eine Menge M heißt* **endlich**, *wenn sie nur endlich viele Elemente enthält, d.h. es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass M genau n viele Elemente enthält.*
- *Die Anzahl der Elemente einer Menge M bezeichnet man auch als* **Mächtigkeit** *der Menge M (in Zeichen: $|M|$).*

$$|M| := \begin{cases} \textit{Anzahl der Elemente in } M, & \textit{falls } M \textit{ endlich ist} \\ \infty, & \textit{sonst} \end{cases}$$

z.B.:

- $|\{4, 7, 2\}| = 3$
- $|\{7, Haus, (Herz, 3), -4, \{l, m, n\}, 9\}| = 6$
- $|\mathbb{N}| = \infty$
- $|\emptyset| = 0$ **aber** $|\{\emptyset\}| = 1$

Satz 3

Satz

Seien L und M Mengen. Es gilt $|L \cup M| = |L| + |M|$ genau dann, wenn L und M disjunkt sind.

Beispiel

- *Sei $L = \{Stein, Papier, Schere\}$ und $M = \{3, Haus, Spock, 5\}$*
  Dann ist:

  $L \cap M = \emptyset$ *und* $L \cup M = \{Stein, Papier, Schere, 3, Haus, Spock, 5\}$ *und*
  $|L \cup N| = 7 = 3 + 4 = |L| + |M|$
- *Sei $L = \{Stein, Papier, Schere\}$ und $M = \{Schere, Haus, Spock, 5\}$*
  Dann ist:

  $L \cap M = \{Schere\}$ *und* $L \cup M = \{Stein, Papier, Schere, Haus, Spock, 5\}$
  und $|L \cup M| = 6 \neq 3 + 4 = |L| + |M|$

  Die Elemente der Schnittmenge werden doppelt gezählt.

Fragen?

?