

# Vorsemesterkurs Informatik

Ronja Düffel & Alexander Kampf  
WS2019/20

25. September 2019

# Übersicht

- Relationen
- Funktionen
- Beweistechniken
  - direkter Beweis
  - Beweis durch Kontraposition
  - Beweis durch Widerspruch

# Wie war das noch?

## Mengen

- Zusammenfassen von wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen
- Reihenfolge der Elemente ist irrelevant
- Elemente können nicht *mehrfach* in einer Menge vorkommen

### Beispiel

$$\begin{aligned} \text{Abendmenü} &:= \{ \text{Frühlingsrollen, Curry, Eis} \} \\ &= \{ \text{Eis, Frühlingsrollen, Curry} \} \\ &= \{ \text{Eis, Frühlingsrollen, Eis, Curry, Eis} \} \end{aligned}$$

**Problem:** Mengen erlauben uns nicht

- Reihenfolge festzulegen
- Mehrfaches Vorkommen zu beschreiben

# Tupel

## Definition (Tupel)

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ .

- 1 Für  $n$  Objekte  $a_1, \dots, a_n$  bezeichnet  $(a_1, \dots, a_n)$  das **Tupel** mit Komponenten  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
- 2  $a_i$  ist die  **$i$ -te Komponente** und die Zahl  $n$  heißt **Länge** des Tupels.
- 3 Tupel der Länge 2 nennen wir auch **geordnete Paare**, Tupel der Länge 3 **Tripel**, Tupel der Länge  $n$  kurz  **$n$ -Tupel**.
- 4 Zwei Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  und  $(b_1, \dots, b_m)$  sind **gleich**, falls  $m = n$  ist und für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt:  $a_i = b_i$ .

Abendmenü := (Eis, Frühlingsrollen, Eis, Curry, Eis)

## Frage 17

Welche der folgenden Gleichungen ist falsch?

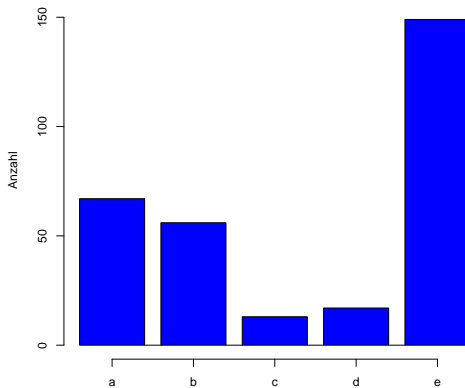
a)  $\{(2, 3)\} = \{(3, 2)\}$

b)  $(\{2, 3\}) = (\{3, 2\})$

c)  $\{2, 3\} = \{2, 3, 2\}$

d)  $\{2, 3\} = \{3, 3, 2\}$

Welche der folgenden Gleichungen ist falsch?



# Tupel vs Mengen

- Das leere Tupel  $()$  hat die Länge 0.
- Es ist  $(1, 2) \neq (1, 2, 1) \neq (1, 2, 2)$ , aber  $\{1, 2, 1\} = \{1, 2, 2\} = \{1, 2\}$ .
- $(\text{Anna}, \text{Peter})$  ist ein geordnetes Paar,  $\{\text{Anna}, \text{Peter}\}$  ist eine zweielementige Menge.
- Es gilt  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  für beliebige Objekte  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

# Kartesisches Produkt

## Definition (Kartesisches Produkt)

Das *kartesische Produkt* zweier Mengen  $A$  und  $B$  ist die Menge

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

### Beispiel:

Sei  $A = \{1, 2, 3\}$  und  $B = \{x, y\}$ . Dann ist das Kartesische Produkt:

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$$



# Kartesisches Produkt

## Definition

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und seien  $M_1, \dots, M_k$  Mengen. Das kartesische Produkt von  $M_1, \dots, M_k$  ist die Menge

$$M_1 \times \dots \times M_k := \{(m_1, \dots, m_k) \mid m_1 \in M_1, \dots, m_k \in M_k\}$$

Falls  $M = M_1 = M_2 = \dots = M_k$ , so schreiben wir  $M^k$  anstelle von  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k$ .

## Beispiel

Abendmenü

$V := \{\text{Fischsuppe, Frühlingsrollen}\}$ ,  $H := \{\text{gebratene Ente, Curry}\}$ ,

$N := \{\text{Eis, Obstsalat}\}$

Abendmenü :=  $V \times H \times N$

mögl. Abendmenü: (Fischsuppe, Curry, Eis)

Kindermenü :=  $N \times V \times N \times H \times N$

mögl. Kindermenü: (Eis, Frühlingsrollen, Eis, Curry, Eis)

# Kartesisches Produkt (Beispiele)

- Das kartesische Produkt der Mengen  $\{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$  und  $\{A, K, D, B, 10, 9, 8, 7\}$  ist die Menge aller Karten in einem Skatblatt.  $\{(\clubsuit, A), (\spadesuit, A), (\heartsuit, A), (\diamondsuit, A), \dots, (\heartsuit, 7), (\diamondsuit, 7)\}$
- Die Menge aller Uhrzeiten im Format SS:MM ist  $\{00, 01, \dots, 23\} \times \{00, 01, \dots, 59\}$ .
- Die Menge aller dreigängigen Menüs, die eine Speisekarte bietet, ist  $V \times H \times N$ , wobei  $V$  die Menge aller Vorspeisen,  $H$  die Menge aller Hauptspeisen,  $N$  die Menge aller Nachspeisen ist.
- Die reelle Zahlenebene ist  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

# Kartesisches Produkt

## Satz (Mächtigkeit)

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und seien  $M_1, M_2, \dots, M_k$  Mengen. Dann gilt

$$|M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \dots \cdot |M_k|.$$

### Beispiel:

Skatkartenspiel:  $F \times W$  mit

$F := \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$  und  $W := \{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$

Mächtigkeit von  $|F \times W| = |F| \cdot |W| = 4 \cdot 8 = 32$

# Relationen

# Relationen

## Definition (Relation)

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $M_1, M_2, \dots, M_n$  Mengen. Eine Teilmenge  $R$  des kartesischen Produkts  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$  heißt **Relation** von  $M_1, M_2, \dots, M_n$  mit **Stelligkeit**  $n$ .

## Beispiel

- die Skatkarten, die ich auf der Hand habe, als 2-stellige Relation der Mengen  $F := \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$  und  $W := \{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$
- $\leq$  als Relation auf  $\mathbb{N}$   
 $\leq = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- die Menge aller Geschwisterpaare als zweistellig Relation auf der Menge aller Menschen.

## Bemerkung:

Jedes kartesische Produkt ist eine Relation

# Funktionen

# Funktionen

## Was wir aus der Schule kennen:

- $f(x) = x^2$
- $g(x) = \sin(x)$
- $h(x) = e^x$
- ...

**Jedes**  $x$  hat *genau einen* "zugehörigen" Wert.

Funktionen sind Relation von zwei Mengen, wobei **jedem** Element der ersten Menge, **genau ein** Element der zweiten Menge zugeordnet wird.

**Funktionen sind spezielle Relationen.**

# Funktionen

## Definition (Funktion)

Seien  $X$  und  $Y$  Mengen.

- (a) Eine Relation  $f \subseteq X \times Y$ , bei der es zu jedem  $x \in X$  genau ein  $y \in Y$  mit  $(x, y) \in f$  gibt, nennen wir **Funktion von  $X$  nach  $Y$**  (in Zeichen:  $f : X \rightarrow Y$ ). Die Menge  $X$  heißt **Definitionsbereich** von  $f$  und die Menge  $Y$  **Bildbereich** von  $f$ .
- (b) Sei  $f$  eine Funktion von  $X$  nach  $Y$ . Für jedes  $x \in X$  bezeichnen wir mit  $f(x)$  das eindeutige  $y \in Y$ , für das  $(x, y) \in f$  gilt. Wir nennen  $f(x)$  auch den **Funktionswert** von  $x$ .
- (c) Sei  $f$  eine Funktion von  $X$  nach  $Y$ . Wir nennen die Menge

$$f(X) := \{y \in Y \mid \text{Es gibt ein } x \in X \text{ mit } f(x) = y\}$$

das **Bild** von  $f$ .



# Funktion

Bei welchen der folgenden Relationen handelt es sich um Funktionen?

- 1 Die geordneten Paare der Form (Matrikelnummer, Studierende) als Teilmenge des kartesischen Produkts von  $\mathbb{N}$  mit den Studierenden der Goethe Universität  
**nein**, denn Matrikelnummer  $\subsetneq \mathbb{N}$
- 2 Die geordneten Paare der Form (Adresse, Einwohner Deutschlands) als Teilmenge des kartesischen Produkts der Menge aller Adressen in Deutschland und der Einwohner Deutschlands  
**nein**, denn mehrere Einwohner haben dieselbe Adresse.
- 3 Die Menge aller belegten Sitzplätze im Hörsaal der Form (Studierende, Sitzplatz) als kartesisches Produkt zwischen der Menge aller anwesenden Studierenden und der Menge aller Sitzplätze. (vorausgesetzt, es gibt genug Sitzplätze.) **ja**, unter der Voraussetzung

# Notation von Funktionen

## Notation

### *Die Varianten*

- $f_1 = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4), (4, 8), \dots\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = 2x\}$
- $f_3 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_3(n) := 2n$
- $f_4 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_4 : n \mapsto 2n$

*beschreiben allesamt dieselbe Funktion von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{N}$ , die jeder natürlichen Zahl ihr Doppeltes zuweist.*

# Gleichheit von Funktionen

## Definition (Gleichheit von Funktionen)

Seien  $X$  und  $Y$  Mengen, seien  $f$  und  $g$  Funktionen mit dem gleichen Definitionsbereich  $X$  und dem gleichen Bildbereich  $Y$ .

Wir bezeichnen  $f$  und  $g$  als **äquivalent** (in Zeichen:  $f \equiv g$ ), wenn für alle  $x \in X$  gilt:  $f(x) = g(x)$ .

- gleicher Definitionsbereich wegen des Gleichheitsbegriffs für Mengen
- gleicher Bildbereich wegen:

### Beispiel:

- $f_0 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_0(n) := n$
- $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f_1(n) := n$

**Beobachtung:** Alle Elemente aus  $\mathbb{N}$  sind Funktionswerte von  $f_0$ , aber nicht alle Elemente aus  $\mathbb{Z}$  sind Funktionswerte von  $f_1$ . Zum Beispiel gibt es kein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $f_1(n) = -1$ .

# Eigenschaften von Funktionen

## Definition (surjektiv, injektiv, bijektiv)

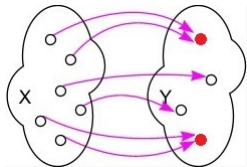
Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion.

- (a) Wir bezeichnen  $f$  als *surjektiv*, wenn es für jedes  $y \in Y$  mindestens ein  $x \in X$  mit  $f(x) = y$  gibt.
- (b) Wir bezeichnen  $f$  als *injektiv*, wenn es für jedes  $y \in Y$  höchstens ein  $x \in X$  mit  $f(x) = y$  gibt.
- (c) Wir bezeichnen  $f$  als *bijektiv*, wenn es für jedes  $y \in Y$  genau ein  $x \in X$  mit  $f(x) = y$  gibt.

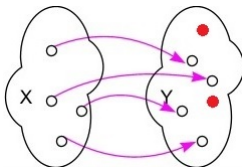
### Beobachtung:

$f$  ist genau dann bijektiv, wenn  $f$  injektiv und surjektiv ist.

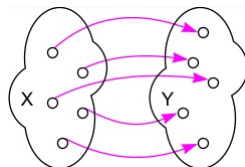
# Eigenschaften von Funktionen



(a) surjektive Funktion



(b) injektive Funktion



(c) bijektive Funktion

Abbildung: *Quelle:*

[http://de.wikibooks.org/wiki/Mathematik:\\_Analysis:\\_Grundlagen:\\_Funktionen](http://de.wikibooks.org/wiki/Mathematik:_Analysis:_Grundlagen:_Funktionen)

# Eigenschaften von Funktionen

**Beispiel:** Sind die folgenden Funktionen surjektiv, injektiv, bijektiv?

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := |x|$   
nein, nein, nein
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, g(x) := |x|$   
ja, nein, nein
- $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, g(x) := |x|$   
ja, ja, ja

**Beobachtung:** Jede nicht-surjektive Funktion lässt sich durch Verkleinerung des Bildbereichs in eine surjektive verwandeln.

Ebenso lässt sich jede Funktion durch Verkleinerung des Definitionsbereichs in eine injektive Funktion verwandeln.

# Eigenschaften von Funktionen

## Satz

Seien  $X$  und  $Y$  endliche Mengen.

Es gilt  $|X| = |Y|$  genau dann, wenn es eine bijektive Funktion von  $X$  nach  $Y$  gibt.

# Beweistechniken



# Wozu Beweise in der Informatik?

... um Aussagen wie

- 1 “Das Programm erfüllt die gewünschte Aufgabe.”
- 2 “Das Programm führt zu keiner Endlosschleife.”
- 3 “Zur Lösung dieser Art von Problemen gibt es kein Patentrezept.”

auf ihren Wahrheitsgehalt zu prüfen, wenn unsere Intuition versagt.

# Drei Beweistechniken

- 1 direkter Beweis
- 2 Beweis durch Kontraposition
- 3 Beweis durch Widerspruch

# Übersicht

- **direkter Beweis**
- Beweis durch Kontraposition
- Beweis durch Widerspruch

# Direkter Beweis

Behauptungen wie

- Wenn eine Zahl durch 10 teilbar ist, dann auch durch 5.
- Die Summe zweier gerader Zahlen, ist gerade.
- Eine Zahl ist genau dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und 3 teilbar ist.
- ...

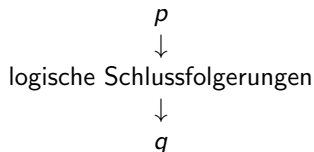
lassen sich durch die Methode des direkten Beweises zeigen.

# Vorgehensweise beim direkten Beweis

Wir leiten *sukcessive* und *in logisch nachvollziehbaren Schritten* die Behauptung her.

Dabei benutzen wir:

- Definitionen
- bereits bekannte Ergebnisse
- weitere Voraussetzungen (falls notwendig)



# Was brauchen wir?

## Beispiel

*Die Summe zweier gerader Zahlen ist wiederum eine gerade Zahl.*

## Definition (gerade Zahl)

*Eine Zahl ist genau dann gerade, wenn sie durch 2 teilbar ist.*

## Definition (Teilbarkeit)

*Eine Zahl  $a$  ist genau dann durch eine Zahl  $b \neq 0$  teilbar, wenn es eine ganze Zahl  $k \in \mathbb{Z}$  gibt, sodass  $a = b \cdot k$ .*

# Beweis: Beispiel

Seien  $a, b \in \mathbb{N}$  und  $a, b$  gerade. Dann sind  $a$  und  $b$  durch 2 teilbar.

Dann gilt:  $a = 2 \cdot l$  und  $b = 2 \cdot k$  für  $l, k \in \mathbb{Z}$ .

Somit gilt:  $a + b = 2 \cdot l + 2 \cdot k$ .

Sei  $m = l + k$ , dann gilt:  $a + b = 2 \cdot l + 2 \cdot k = 2 \cdot m$  und  $m \in \mathbb{Z}$

Somit ist  $a + b$  durch 2 teilbar und damit gerade.



# Beweis Satz 2

## Satz

Seien  $A$  und  $B$  Mengen.

$A = B$  gilt genau dann, wenn  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$  gelten.

## Definition (Gleichheit, Teilmenge)

Seien  $M$  und  $N$  Mengen:

- $M$  und  $N$  sind genau dann **gleich** (kurz:  $M = N$ ), wenn sie **dieselben** Elemente enthalten.
- $M$  ist genau dann eine **Teilmenge** von  $N$  (kurz:  $M \subseteq N$ ), wenn jedes Element von  $M$  auch ein Element von  $N$  ist.



# Beweis Satz 2

## Satz

Seien  $A$  und  $B$  Mengen.

$A = B$  gilt genau dann, wenn  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$  gelten.

Wir müssen **zwei** "Richtungen" zeigen.

- 1 Wenn  $A = B$  gilt, dann gilt  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$ .
- 2 Wenn  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$  gilt, dann gilt auch  $A = B$ .



**z.Z:** Wenn  $A = B$  gilt, dann gilt  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$ .

Es gelte  $A = B$ .

$\Rightarrow$   $A$  und  $B$  enthalten dieselben Elemente

$\Rightarrow$  jedes  $x \in A$  ist auch  $\in B$  und  
jedes  $x \in B$  ist auch  $\in A$

$\Rightarrow$  es gilt  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$



**z.Z:** Wenn  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$  gilt, dann gilt auch  $A = B$ .

Es gelte  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$

$\Rightarrow$  jedes  $x \in A$  ist auch  $\in B$  und  
jedes  $x \in B$  ist auch  $\in A$

$\Rightarrow$   $A$  und  $B$  enthalten dieselben Elemente

$\Rightarrow$  es gilt  $A = B$



# Übersicht

- direkter Beweis
- **Beweis durch Kontraposition**
- Beweis durch Widerspruch

# Beweis durch Kontraposition

## Beispiel

*Wenn  $a^2$  ungerade ist, dann ist  $a$  ungerade.*

**Problem:** Es bietet sich kein direkter Beweis an.

**Lösung:** *Beweis durch Kontraposition*

## Zurück zur Wahrheitstafel...

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

## Fazit

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

## Beispiel (Planet Zutan)

*Wenn der Bewohner rot ist, hat er grüne Haare.*

*$\equiv$  Wenn der Bewohner keine grünen Haare hat, ist er auch nicht rot.*

# Beispiel für einen Beweis durch Kontraposition I

## Beispiel

*Wenn  $a^2$  ungerade ist, dann ist  $a$  ungerade.*

Aussage	Negation
$a^2$ ist eine ungerade Zahl.	$a^2$ ist eine gerade Zahl.
$a$ ist eine ungerade Zahl.	$a$ ist eine gerade Zahl.

Wir zeigen also:

## Satz

*Wenn  $a$  gerade ist, ist auch  $a^2$  gerade.*

# Beispiel für einen Beweis durch Kontraposition I

## Satz

*Wenn  $a$  gerade ist, ist auch  $a^2$  gerade.*

Beweis:

Sei  $a$  eine beliebige **gerade** Zahl.

$$\Rightarrow a = 2 \cdot k \text{ für eine ganze Zahl } k$$

$$\Rightarrow a^2 = 2^2 \cdot k^2 \text{ für eine ganze Zahl } k$$

$$\Rightarrow a^2 = 2 \cdot 2 \cdot k^2 \text{ für eine ganze Zahl } k$$

$$\Rightarrow a^2 = 2 \cdot l \text{ mit } l = 2 \cdot k^2 \text{ für eine ganze Zahl } k$$

$$\Rightarrow a^2 = 2 \cdot l \text{ für eine ganze Zahl } l$$

$$\Rightarrow a^2 \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar, d.h. } a^2 \text{ ist gerade.}$$





# Beweis durch Kontraposition

Ziel: Beweis der Aussage

## Satz (1)

*Wenn  $a^2$  ungerade ist, dann ist  $a$  ungerade.*

Direkter Beweis schwierig, daher Beweis der **aussagenlogisch äquivalenten** Aussage:

## Satz (2)

*Wenn  $a$  gerade ist, dann ist  $a^2$  ebenfalls gerade.*

Damit haben wir Aussage 1 indirekt bewiesen.

# Übersicht

- direkter Beweis
- Beweis durch Kontraposition
- **Beweis durch Widerspruch**

# Beispiel für einen Beweis durch Widerspruch I

## Beispiel

$\sqrt{2}$  ist irrational.

**Problem:** Wo sind Voraussetzung  $p$  und Folgerung  $q$ ?

atomare Aussage

Weder ein direkter noch ein Beweis durch Kontraposition bieten sich an.

**Lösung:** Angenommen,  $\sqrt{2}$  ist rational.

Wir wollen zeigen, dass das zu einem Widerspruch führt.

# $\sqrt{2}$ ist irrational, Beweis durch Widerspruch

Angenommen,  $\sqrt{2}$  ist rational.

$$\implies \sqrt{2} = \frac{a}{b}, \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z} \text{ und teilerfremd, d.h. } \text{ggT}(a, b) = 1$$

$$\implies 2 = \frac{a^2}{b^2} \implies 2 \cdot b^2 = a^2$$

$$\implies a^2 \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar, da } b^2 \in \mathbb{Z}$$

$$\implies a \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar (bereits bewiesen)}$$

$$\implies a = 2 \cdot k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\implies 2 \cdot b^2 = (2 \cdot k)^2$$

$$\implies b^2 \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar}$$

$$\implies b \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar}$$

$$\implies 2 \text{ teilt sowohl } a, \text{ wie auch } b$$

$$\implies \text{Widerspruch zu } a \text{ und } b \text{ sind teilerfremd.}$$

$$\implies \sqrt{2} \text{ ist irrational}$$



# Beweistechniken

- direkter Beweis

$$p \rightarrow a_1 \rightarrow \dots \rightarrow q$$

- Beweis durch Kontraposition

$$\neg q \rightarrow a_1 \rightarrow \dots \rightarrow \neg p$$

- Beweis durch Widerspruch

$$\neg p \rightarrow a_1 \rightarrow \dots \rightarrow \text{Widerspruch (Falsche Aussage)}$$

# Worauf man beim Beweisen achten sollte

- Angabe der Beweistechnik am Anfang hilft dem Leser die Idee zu verstehen.
- keine Gedankensprünge im Beweis, nur leicht nachvollziehbare Schlussfolgerungen
- Kennzeichnung am Ende eines Beweises (z.B. durch  $\square$  )
- Bei längeren Beweisen ist zum Schluss ein kurzer Satz, was gezeigt wurde, hilfreich.

# Fragen?

?