Induktion und Rekursion

Ronja Düffel & Alexander Kampf

WS2019/20

27. September 2019

Der kleine Gauß

Der kleine Gauß

- **Aufgabe:** addiert die ersten 100 Zahlen zusammen

  berechnet $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$

- **Gauß Trick:** $101 = 100 + 1 = 99 + 2 = 98 + 3 = \ldots$

- **Vermutung:** Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- **Beweis** durch vollständige Induktion

Summen und Produkte

Definition (Summen und Produkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebige Zahlen. Dann ist:

- $\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

  insbesondere ist die leere Summe: $\sum_{i=1}^{0} a_i = 0$.
- $\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \ldots a_n$

  insbesondere ist das leere Produkt: $\prod_{i=1}^{0} a_i = 1$.

Vollständige Induktion

Vollständige Induktion

Ziel

Ziel

beweise, dass eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel

Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsprinzip

Schließe vom Besonderen auf das Allgemeine.

1. **Induktionsanfang:** Zeige, dass A für den kleinsten, oder die kleinsten Werte von n gilt.
2. **Induktionsschritt:** zeige, dass für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: falls $A(n)$ gilt, dann gilt auch $A(n+1)$.

Insbesondere gilt dann

- $A(2)$, wenn $A(1)$ wahr ist,

damit gilt aber auch

- $A(3)$, da $A(2)$ gilt,
- $A(4)$, da $A(3)$ gilt, usw.

Domino-Effekt

kleiner Gauß

Satz (kleiner Gauß)

$A(n)$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang: $A(1)$

Behauptung: Der Satz gilt für $n = 1$.

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

kleiner Gauß

Satz (kleiner Gauß)

$A(n)$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsschritt: $A(n) \to A(n+1)$

Induktionsvoraussetzung: Es gilt $A(n)$, also $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsbehauptung: Es gilt $A(n+1)$, also

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

kleiner Gauß

zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Beweis:

an der Tafel

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n+1} = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1) \qquad \text{Induktionsvoraussetzung anwenden}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \qquad \text{erweitern}$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \qquad (n+1) \text{ ausklammern}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

$\square$

Warum geht das?

1. Wir haben die Behauptung für ein spezielles n direkt bewiesen
2. Wir haben gezeigt:

   Wenn die Behauptung für ein **beliebiges** n gilt,

   dann gilt sie auch für den Nachfolger $n + 1$.

Damit kann dann für **alle** n argumentiert werden.

Was kann schiefgehen? (1)

Beispiel

Kein Induktionsanfang

$$A(5 \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar}) \rightarrow B(7 \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar})$$

- *logisch korrekte Schlussfolgerung*
- *Aussage ist trotzdem falsch, da Voraussetzung nicht gegeben ist.*

Was kann schiefgehen? (2)

Beispiel

Behauptung: *In einen Koffer passen unendlich viele Socken.*
Induktionsanfang: $n = 1$ *In einen leeren Koffer passt ein Paar Socken.*
Induktionsschritt: $n \to n + 1$
Induktionsvoraussetzung: n Paar Socken passen in den Koffer.
Induktionsbehauptung: $n + 1$ *Paar Socken passen in den Koffer.*
Beweis: n Paar Socken befinden sich im Koffer. Aus Erfahrung weiß man, ein Paar Socken passt immer noch rein.
$\Rightarrow$ $n + 1$ *Paar Socken passen in den Koffer.*
$\Rightarrow$ *unendlich viele Socken passen in den Koffer.* **????**

Was kann schiefgehen? (2)

Beispiel (kein konstruktives Argument im Induktionsschritt)

Behauptung: *In einen Koffer passen unendlich viele Socken.*
Induktionsanfang: $n = 1$ *In einen leeren Koffer passt ein Paar Socken.*
Induktionsschritt: $n \to n + 1$
Induktionsvoraussetzung:n Paar Socken passen in den Koffer.
Induktionsbehauptung: $n + 1$ *Paar Socken passen in den Koffer.*
Beweis: n Paar Socken befinden sich im Koffer. Aus Erfahrung weißman, ein Paar Socken passt immer noch rein.
$\Rightarrow$ $n + 1$ *Paar Socken passen in den Koffer.*
$\Rightarrow$ *unendlich viele Socken passen in den Koffer.* **????**

Konstruktives Argument hätte sagen müssen wo genau die Lücke für das extra Paar Socken ist.

Wann anwendbar?

- Beweis von Aussagen, die sich auf Objekte beziehen, die als natürliche Zahlen betrachtet werden können.
  z.B. Geraden, Spielzüge, Menschen, Socken...
- es muss sich $A(n+1)$ aus $A(n)$ folgern lassen.
- Aussagen über rekursiv definierte Mengen oder Funktionen.

Rekursion

Rekursion

Rekursion

Definition

Eine rekursive Funktion ist eine Funktion, die durch sich selbst definiert wird.
Rekursionsanfang: Fall (Fälle) für den (die) die Funktion nicht wieder selbst aufgerufen wird
Rekursionsschritt: rekursiver Aufruf der Funktion.

Beispiel (Fakultätsfunktion)

$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \textit{falls } n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Fakultätsfunktion

$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(1) &= 1 \cdot f(0) = 1 \cdot 1 = 1 \\ f(2) &= 2 \cdot f(1) = 2 \cdot (1 \cdot f(0)) = 2 \cdot (1 \cdot 1) = 2 \\ f(3) &= 3 \cdot f(2) = 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 1)) = 6 \end{aligned}$$

Man schreibt auch $f(n) = n!$

Satz

Für die Fakultätsfunktion $f(n)$ gilt: $f(n) = \prod_{i=1}^{n} i$.

Beweis durch vollständige Induktion

Induktionsanfang: $n = 0$

Behauptung: Der Satz gilt für $n = 0$.

Beweis: Es gilt: $f(0) = 1$. Ferner gilt: $\prod_{i=1}^{0} i = 1$.
Somit gilt: $f(0) = 1 = \prod_{i=1}^{0} i$.

Induktionsschritt: $n \to n + 1$

Induktionsvoraussetzung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f(n) = \prod_{i=1}^{n} i$.

Induktionsbehauptung: Es gilt: $f(n+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i$.

Induktionsbehauptung: Es gilt: $f(n+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i$.

Beweis:

an der Tafel

Induktionsbehauptung: Es gilt: $f(n+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= n+1) \cdot f(n) && \text{Induktionvoraussetzung} \\
&= (n+1) \cdot \prod_{i=1}^{n} i \\
&= (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \\
&= \prod_{i=1}^{n+1} i
\end{aligned}$$

$\square$

Sind wir fertig?

1. Wir haben die Behauptung für $n = 0$ gezeigt.
2. Wir haben gezeigt:

   Wenn die Behauptung für n gilt, **dann** gilt sie auch für $n + 1$.

   wichtig: Verwendung der Induktionsvoraussetzung

ideale Kaninchen

- Ein Kaninchenpaar (m,w)
- ist nach einem Monat geschlechtsreif
- gebären nach einem Monat Tragzeit ein weiteres Kaninchenpaar
- Kaninchen sterben nie
- Wie viele Kaninchenpaare nach n Monaten (KP_n)?

Kaninchen

schnell!

Kaninchen

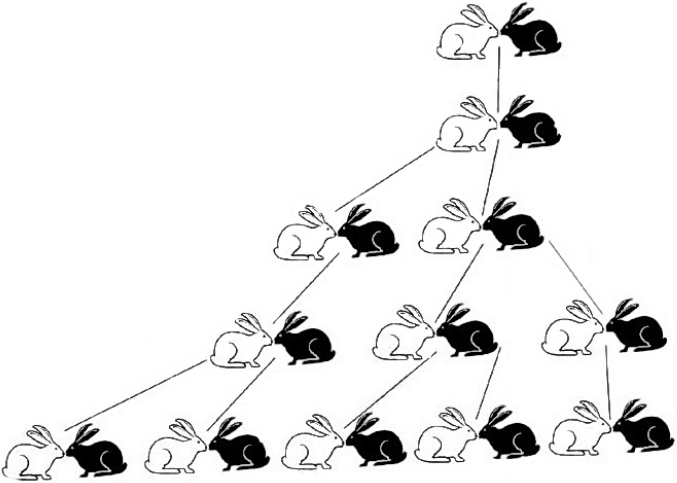
1. Monat $\rightarrow$ 1 Paar

2. Monat $\rightarrow$ 1 Paar

3. Monat $\rightarrow$ 2 Paare

4. Monat $\rightarrow$ 3 Paare

5. Monat $\rightarrow$ 5 Paare



Kaninchen

Wie viele (ideale) Kaninchenpaare K_n habe ich nach n Monaten?

- Die Kaninchen sterben nie

$$K_n = K_{n-1} + \text{ die Neugeborenen}$$

- ab dem zweiten Lebensmonat, jeden Monat ein neues Paar

  $\rightarrow$ alle Paare, die mindestens 2 Monate alt sind, bekommen Nachwuchs

  $\rightarrow$ Anzahl der Neugeborenen in Monat n: K_{n-2}

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-2}$$

Türme von Hanoi

Regeln:

- nur eine Scheibe bewegen
- niemals eine größere auf eine kleinere Scheibe legen.

Algorithmus Türme von Hanoi

Algorithmus

```
function hanoi(n, start, ziel, hilf){
    if (n > 1){
        hanoi(n-1,start,hilf,ziel)
    }
    verschiebe Scheibe n von start auf ziel
    if (n > 1){
        hanoi(n-1,hilf,ziel,start)
    }
}
```

Anzahl der Spielzüge

$n = 1$	Schiebe 1 von A nach B	1 Zug
$n = 2$	$1 \curvearrowright$ C, $2 \curvearrowright$ B, $1 \curvearrowright$ B	3 Züge
$n = 3$	$1 \curvearrowright$ B, $2 \curvearrowright$ C ,$1 \curvearrowright$ C, $3 \curvearrowright$ B, $1 \curvearrowright$ A, $2 \curvearrowright$ B, $1 \curvearrowright$ B	7 Züge

Satz

Um n Scheiben von einem Stapel zu einem anderen zu transportieren, werden mindestens $2^n - 1$ Spielzüge benötigt.

Beweis Anzahl der Spielzüge

Induktionsanfang:$n = 1$

Behauptung: Um eine Scheibe von A nach B zu setzen, werden $2^1 - 1 = 1$ Spielzüge benötigt.

Beweis: offensichtlich korrekt, wir setzen die Scheibe von A nach B.

Induktionsschritt:$n \to n + 1$

Induktionsvoraussetzung: Um n Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^n - 1$ Spielzüge benötigt.

Induktionsbehauptung: Um $n + 1$ Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^{n+1} - 1$ Spielzüge benötigt.

Induktionsbehauptung: Um $n+1$ Scheiben von einem zu einem anderen Stapel zu transportieren, werden $2^{n+1}-1$ Spielzüge benötigt.

Beweis:

1. transportiere n Scheiben von start auf hilf
2. transportiere Scheibe $n+1$ von start auf ziel
3. transportiere n Scheiben von hilf auf ziel

$$2^n - 1 + 1 + 2^n - 1 = 2^n + 2^n - 1 + 1 - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

$\square$

Turm von Benares

- bei 64 Scheiben, benötigen die Mönche 2^{64} Züge
- bei 1 Zug pro Sekunde sind das 18 446 744 073 709 551 615 Sekunden
- das entspricht 584 942 417 400 Jahren

Fragen?

?

Fachschaft


Events für Erstsemester
EG-Robert-Mayer-Straße 11-15
08.10. 16:00 Uhr - SR 11 ‣ Linux-Install-Party
Laptop mitbringen + USB-Stick ≥ 4GB !
OE – WS 19/20
10.- 11.Oktober 2019
10.10. 11:00 Uhr – Magnushörsaal
Laptop mitbringen !
‣ Infos zum Studium
‣ ewiges Frühstück
‣ Anwendungsfächer
‣ Tipps für die ersten Wochen
~ 14:30 Uhr ‣ Rundgang Campus Bockenheim
Zeit für die Uni-Start-Messe
~ 18:00 Uhr - Lounge
‣ nette Runde + Switch + Beamer + Spiele
- SR 9 ‣ Lan-Party (LoL, CS:GO, Minecraft)
11.10. 12:00 Uhr - Magnushörsaal
‣ ewiges Frühstück
‣ Infos über Frankfurt
‣ das 1. Semester
‣ IT-Infrastruktur
‣ Initiativen
Grillen im Anschluss - Lichthof

Ich (Alexander Kampf)

dotKuro

https://github.com/dotKuro/vorsemesterWISE19-20

Vielen Dank!