Aussagenlogik

Vorsemesterkurs Informatik
Wintersemester 2020/21

Ronja Düffel

19. Oktober 2020

Was ist das?

- Lehre des vernünftigen Schlussfolgerns
- Beschäftigt sich u.a. mit der Frage:
  - Wie kann man Aussagen miteinander verküpfen?
  - Auf welche Weise kann man formale Schlüsse ziehen und Beweise durchführen?

Warum ist das wichtig?

- Modellierung von Wissen (z.B. künstliche Intelligenz)
- Auswertung von Datenbankanfragen
- Kontrollfluss von Computerprogrammen (`if-then-else`-Konstrukte)
- Logikbausteine in der technischen Informatik (Hardware)
- Verifikation von
  - Schaltkreisen
  - Programmen
  - Protokollen (Kommunikation zwischen Systemen z.B. Internetbanking)

logische Aussagen

Definition (Aussage)

Eine logische Aussage *(kurz* Aussage*) ist ein Satz oder Ausdruck, der entweder wahr (1) oder falsch (0) sein kann.*
0 *und* 1 *werden auch* Wahrheitswerte *genannt.*

zum Beispiel:

- Die Sonne scheint.
- Eine Zahl a ist durch 3 teilbar.
- $3 > 7$
- Wenn der Bewohner rot ist, dann hat er grüne Haare.
- Jede gerade Zahl die größer als 2 ist, ist die Summe zweier Primzahlen (Goldbach Vermutung)

logische Aussagen

keine logischen Aussagen sind dagegen:

- $1 + 2$, es kann kein Wert (wahr oder falsch) zugeordnet werden.
- 2 ist eine kleine Zahl ("klein" ist für Zahlen nicht definiert.)
- Aufforderungen und Fragen ("Komm her!") ("Was machen wir?")
- „Dieser Satz ist falsch.“, da dieser Satz weder wahr noch falsch sein kann

atomare Aussagen

atomare Aussagen sind Aussagen, die nicht weiter zerlegt werden können.

Beispiel

Wenn die Sonne scheint, gehe ich an den Strand und sonne mich.
Wenn *die Sonne scheint, gehe ich an den Strand* und *sonne mich.*
atomare Aussagen:

A:= „Die Sonne scheint"
B:= „Ich gehe an den Strand"
C:= „Ich sonne mich"

$$\varphi = (A \rightarrow (B \wedge C))$$

Syntax der Aussagenlogik

Die **Syntax** legt fest, welche Zeichenketten (Worte) Formeln der Aussagenlogik sind

Definition (Syntax der Aussagenlogik)

i) *Jede atomare Aussage ist eine aussagenlogische Formel (aF)*

ii) 0 *ist eine aussagenlogische Formel (aF)*

iii) 1 *ist eine aussagenlogische Formel (aF)*

Rekursive Regeln

iv) *Wenn* φ *eine aF ist, dann ist auch* $\neg\varphi$ *eine aF.*

v) *Wenn* φ *eine aF ist und* ψ *eine aF ist, dann sind*

- $(\varphi \wedge \psi)$,
- $(\varphi \vee \psi)$,
- $(\varphi \rightarrow \psi)$,
- *und* $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ *ebenfalls aussagenlogische Formeln.*

Beispiele

Seien A, B und C atomare Aussagen.

- $(0 \lor 1)$, aF
- $\neg A \land B$, keine aF
- $\neg(A \land B)$, aF
- $(\neg A \land B)$, aF
- $(A\neg \rightarrow (B \lor C))$, keine aF

Semantik der Aussagenlogik

Die **Semantik** legt fest, welche *Bedeutung* einzelne Formeln haben.

Definition (Negation, $\neg$)

Die Formel $\neg A$ (bedeutet: "nicht A") ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Beispiel (Frage 21)

A:=„Alle Kinder spielen gern."

a) *Kein Kind spielt gern.*

b) *Alle Kinder spielen nicht gern.*

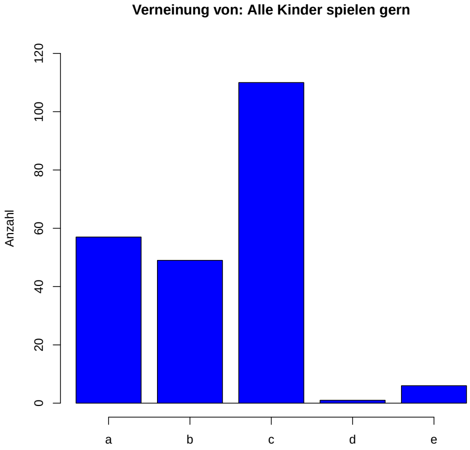
c) *Nicht alle Kinder spielen gern.*

d) *Alle Kinder hassen Spiele.*

$\neg$A:=„Nicht alle Kinder spielen gern."
Wahrheitstabelle:

A	$\neg A$
0	1
1	0

Anmeldung


Verneinung von: Alle Kinder spielen gern
Anzahl
0
20
40
60
80
100
120
a
b
c
d
e

Konjunktion

Definition (Konjunktion, $\wedge$)

Die Formel $(A \wedge B)$ (bedeutet: "A und B") ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr ist.

Beispiel

Der Bewohner ist rot und *er hat grüne Haare.*

Wahrheitstafel:

A	B	$(A \wedge B)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjunktion

Definition (Disjunktion, $\vee$)

Die Formel $(A \vee B)$ (bedeutet: "A oder B") ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen A oder B wahr sind.

Wahrheitstafel:

A	B	$(A \vee B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Implikation

Definition (Implikation, $\rightarrow$)

Die Formel $(A \rightarrow B)$ (bedeutet: "Wenn A dann B") ist genau dann wahr, wenn A falsch ist, oder sowohl Aussage A, als auch Aussage B wahr ist.

Wahrheitstafel:

A	B	$(A \rightarrow B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Beispiel:
Wenn alle ungeraden Zahlen Primzahlen sind, dann ist 7 eine Primzahl.

Beispiel:
$\underbrace{\text{Wenn alle ungeraden Zahlen Primzahlen sind}}_{A}$, $\underbrace{\text{dann ist 7 eine Primzahl}}_{B}$.

Biimplikation

Definition (Biimplikation, $\leftrightarrow$)

Die Formel $(A \leftrightarrow B)$ (bedeutet: "A genau dann wenn B") ist genau dann wahr, wenn Aussagen A und B beide falsch oder beide wahr ist.

Wahrheitstafel:

A	B	$(A \leftrightarrow B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Beispiel

Jeder bekommt einen Sitzplatz genau dann, wenn *es höchstens so viele Interessenten wie Sitzplätze gibt.*

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit

Definition (Erfüllbarkeit)

Eine aussagenlogische Formel φ heißt erfüllbar, *wenn es (mindestens) eine Belegung der Variablen gibt, sodass die Formel den Wahrheitswert* 1 *hat.*

z.B. $(A \wedge B)$

Definition (Unerfüllbarkeit)

φ *heißt* unerfüllbar, *wenn es* keine *erfüllende Belegung gibt.*

z.B. $(A \wedge \neg A)$

Definition (Allgemeingültigkeit)

φ *heißt* allgemeingültig *(auch* Tautologie*), wenn φ für* jede *Belegung den Wahrheitswert* 1 *annimmt.*

z.B. $(A \vee \neg A)$

Äquivalenz

Definition

Zwei aussagenlogische Formeln φ *und* ψ *heißen* äquivalent $(\equiv)$*, wenn die Wahrheitswerte für* alle *passenden Belegungen für* φ *und* ψ *identisch sind.*

Beispiel

Für $\varphi = (\neg A \vee B)$ *und* $\psi = (A \rightarrow B)$ *gilt:* $\varphi \equiv \psi$

Wahrheitstafel:

A	B	$\neg A$	φ $(\neg A \vee B)$	ψ $(A \rightarrow B)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Frage 22

Wenn der Bewohner rot ist, **dann** hat er grüne Haare.

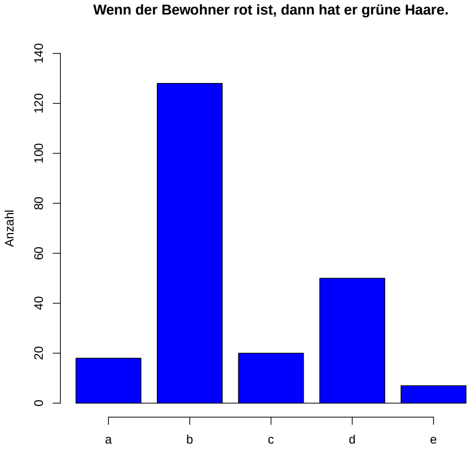
a) Wenn der Bewohner nicht rot ist, dann hat er keine grünen Haare.

b) Wenn der Bewohner keine grünen Haare hat, dann ist er nicht rot.

c) Wenn der Bewohner grüne Haare hat, dann ist er rot.

d) Alle sind richtig

Anmeldung


Wenn der Bewohner rot ist, dann hat er grüne Haare.
Anzahl
0
20
40
60
80
100
120
140
a
b
c
d
e